

Der Durchmesser von bipartiten distanz-regulären Graphen

Holger Üffink

25. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Problem	1
1.2	Der Aufbau des Vortrags	1
2	Definitionen und Voraussetzungen	2
2.1	Definitionen	2
2.2	Voraussetzungen	3
3	Der Beweis	4
4	Beispiel für einen distanz-regulären Graphen	7

1 Einleitung

1.1 Das Problem

Bipartite distanz-reguläre Graphen sind ein Spezialfall der distanz-regulären Graphen, wo es weiterhin eine offene Frage ist, ob es endlich viele solcher Graphen gibt. Lediglich Ergebnisse über weitere Spezialfälle sind bekannt.

Dieser Vortrag bezieht sich auf den Artikel „The Diameter of Bipartite Distance-Regular Graphs“ aus dem Jahre 1982 von Paul Terwilliger. Es wird gezeigt, dass es endlich viele bipartite distanz-reguläre Graphen gibt, welche mindestens einen Kreis enthalten und festen, endlichen Grad $k \geq 3$ haben. Desweiteren genügt der Durchmesser d eines solchen Graphen der Ungleichung $d \leq \frac{(k-1)(g-2)}{2} + 1$, unter der Voraussetzung, dass g die Tailenweite des Graphen bezeichnet.

1.2 Der Aufbau des Vortrags

Im Folgenden werden zunächst Definitionen und Voraussetzungen geklärt. Anschließend wird mithilfe zweier Lemmata das darauf folgende Theorem bewiesen, womit das abschließende Korollar die obige Ungleichung sowie die Endlichkeit bipartiter distanz-regulärer Graphen, welche mindestens einen Kreis enthalten, zeigt. Abschnitt 4 zeigt ein Beispiel mit graphischen Anschauungen.

2 Definitionen und Voraussetzungen

2.1 Definitionen

Sei $G=(V(G),E(G))$ ein ungerichteter und einfacher (das heisst ohne Mehrfachschlingen und Schleifen) Graph, wobei $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ eine möglicherweise unendliche Knotenmenge von G und $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ die Kantenmenge von G bezeichne.

- Zwei Knoten u und v heissen adjazent, wenn $(u, v) \in E(G)$.
- Der Graph heisst lokal endlich, falls jeder Knoten adjazent zu endlich vielen anderen Knoten ist.
- Für $u, v \in V(G)$ bezeichne $\delta(u, v)$ die Distanz zwischen den beiden Knoten, das heisst die Länge des kürzesten Weges zwischen diesen beiden Knoten.
- Der Durchmesser d des Graphen G bezeichnet den maximalen Wert von $\delta(u, v)$ für alle $u, v \in V$, das heisst $d = \max_{u, v \in V} \delta(u, v)$.
- Ein Kreis ist eine Sequenz $\{v_1, \dots, v_m\}$ mit $m \geq 3$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $1 \leq i \leq m - 1$ und $(v_m, v_1) \in E$.
- Die Tailenweite g des Graphen ist die Anzahl der Knoten in einem kleinsten Kreis des Graphen.
- Der Graph heisst bipartit, wenn es keinen Kreis mit ungerader Knotenanzahl gibt. Äquivalent ist die Definition, dass $V(G)$ in zwei Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ aufgeteilt werden kann, sodass $V_1 \cup V_2 = V(G)$ gilt und keine zwei Knoten in V_1 adjazent bzw. keine zwei Knoten in V_2 adjazent sind.
- Für $W \subseteq V(G)$ ist der knoteninduzierte Teilgraph $G' = (V', E')$ definiert durch $V' = W$ und $E' = \overline{\{(u, v) | (u, v) \in E \wedge u, v \in W\}}$.
- Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ und $u, v \in V(G)$ setze $S_{i,j,u,v} := \{x \in V(G) | \delta(u, x) = i \wedge \delta(x, v) = j\}$, das heisst genau die Knoten, die einen kürzesten Weg der Länge i zu u und j zu v haben.
- Der Graph hat Grad k , wenn $|S_{1,1,u,u}| = k$ für alle $u \in V(G)$ gilt. Das heisst, jeder Knoten hat genau k Nachbarn.

- Der Grad $\text{dg}(x)$ eines Knoten x ist die Anzahl der Knoten, die adjazent zu ihm sind.
- Der Graph heisst distanz-regulär, wenn $|S_{i,j,u,v}|$ nur von i, j und $\delta(u, v)$ abhängt. Das heisst, sobald man einen kürzesten Weg der Länge $\delta(u, v)$ sowie i und j vorgegeben hat, ist $|S_{i,j,u,v}|$ unabhängig von der Wahl von u und v , denn der Graph hat an allen Knoten, die als Abstand $\delta(u, v)$ haben, die gleiche Struktur.
- Für $i \geq 0$ und $\delta(u, v) = i$ setze
 - $c_i := |S_{i-1,1,u,v}|$ (Anzahl Knoten, adjazent zu v , näher an u)
 - $a_i := |S_{i,1,u,v}|$
 - $b_i := |S_{i+1,1,u,v}|$
- Die Koeffizienten c_i und b_i werden in einem Intersection Array $\{c_1 = 1, c_2, \dots, c_i, \dots; b_0 = k, b_1, \dots, b_i, \dots\}$ repräsentiert. (Bemerkung: Die a_i 's sind nicht von Interesse, da für $1 \leq i \leq d$ gilt: $a_i + b_i + c_i = k$. Im bipartiten Fall sind die a_i 's sogar immer 0 für $i \geq 1$)

2.2 Voraussetzungen

Sei nun G ein beliebiger bipartiter, distanz-regulärer Graph (möglicherweise unendlich) mit Intersection Array $\{c_1 = 1, c_2, \dots, c_i, \dots; b_0 = k, b_1, \dots, b_i, \dots\}$.
 Seien u und v zwei verschiedene Knoten aus $V(G)$ mit Distanz $\delta(u, v) = n$ für ein $n \geq 1$. Sei B der knoteninduzierte Teilgraph von G mit Knotenmenge $V(B) = \bigcup_{m=0}^n S_{m,n-m,u,v} = \{x \in V(G) | \delta(u, x) + \delta(x, v) = n = \delta(u, v)\}$
 Desweiteren werden die Distanzen, wenn nichts anderes angegeben ist, in G gemessen, nicht in B .

3 Der Beweis

Lemma 3.0.1. *Sei x irgendein Knoten in B mit $\delta(x, u) = i$ ($1 \leq i \leq n - 1$). Dann ist der Grad von x in B $c_i + c_{n-i}$ und der Grad von u und v in B c_n .*

Beweis:

Die Menge der Knoten in B , die adjazent zu x sind, ist die Vereinigung $S_{i-1,1,u,x} \cup S_{1,n-i-1,x,u}$, also $dg(x) = c_i + c_{n-i}$.

Für u, v sind dies die Mengen $S_{1,n-1,u,v}$ und $S_{n-1,1,u,v}$, also $dg(u) = dg(v) = c_n$. □

Lemma 3.0.2. $\forall a, b \in V(B) : \delta(a, b) \leq \delta(u, v) = n$

Beweis:

Seien $a, b \in V(B)$ beliebig. Nach der Definition von B gilt:

$$\delta(a, v) + \delta(a, u) = n \text{ und } \delta(b, u) + \delta(b, v) = n$$

Addiert man beide Gleichungen, ergibt das also:

$$\delta(a, v) + \delta(a, u) + \delta(b, u) + \delta(b, v) = 2n$$

Es gilt also entweder $\delta(a, u) + \delta(b, u) \leq n$ oder $\delta(a, v) + \delta(b, v) \leq n$

O.B.d.A. sei $\delta(a, u) + \delta(b, u) \leq n$. Mithilfe der Dreiecksungleichung folgt dann: $\delta(a, b) \leq \delta(a, u) + \delta(b, u) \leq n$ □

Theorem 3.0.3. *Für jeden bipartiten, distanz-regulären Graphen G , jede natürliche Zahl $n \leq d$ (d Durchmesser von G) gilt:*

$$c_n > 1 \Rightarrow \exists i : 1 \leq i \leq n - 1, c_n \geq c_i + c_{n-i}$$

Beweis:

Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle i ($1 \leq i \leq n - 1$) gilt:

$$c_i + c_{n-i} > c_n$$

Seien nun u, v zwei Knoten in G mit $\delta(u, v) = n$. Sei B der wie vorhin definierte induzierte Teilgraph von u und v . Man definiere nun die Funktion $f : V(B) \times V(B) \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$f(a, b) := \delta(a, b) - |\delta(a, u) - \delta(b, u)| \quad \forall a, b \in V(B)$$

Aus dem Lemma 3.0.2 und der Dreiecksungleichung folgt $0 \leq f(a, b) \leq n$

und es gilt $f(u, v) = n - |0 - n| = 0$.

Man definiere nun $f_0 := \max\{f(a, b) | a, b \in V(B)\}$ und zeige $f_0 = 0$,

was bedeutet: $f(a, b) = 0$ gilt für alle $a, b \in V(B)$.

Sei $\{(a, b) | f(a, b) = f_0\} =: S \subseteq V(B) \times V(B)$, also die Menge der Knotenpaare, wo f sein Maximum annimmt. Sei nun (a, b) das Paar in S , wo $|\delta(a, u) - \delta(b, u)|$ maximal ist.

Behauptung 1: $(a, b) = (u, v)$ bzw. $(a, b) = (v, u)$

Beweis (Behauptung 1):

Angenommen, dass $(a, b) \neq (u, v)$ bzw. (v, u) gilt, also o.B.d.A. $a \neq u$ und $a \neq v$. Man erhalte somit $\delta(a, u) = j$, wobei $1 \leq j \leq n - 1$ gelte.

Aus dem Lemma 3.0.1 folgt, dass $dg(a) = c_j + c_{n-j}$ in B ist.

Nach der Voraussetzung vom Anfang des Beweises gilt nun: $c_j + c_{n-j} > c_n$.

Aus dem Lemma 3.0.2 weiß man: $\delta(a, b) = l$, wobei $l \leq n$.

Aufgrund der Distanz-Regularität von G gibt es genau c_l Knoten in G , die zu a adjazent sind und näher zu b als a dies ist. Wegen der Bipartition gilt für die verbleibenden $k - c_l$ Knoten, welche adjazent zu a sind, dass ihre Distanz zu b größer ist als die Distanz von a zu b .

Es gibt mehr als c_n Knoten in B , welche adjazent zu a sind.

Da $l \leq n$ gilt, ist $c_n \geq c_l$ aufgrund der Distanz-Regularität. Daher gibt es einen Knoten p in B , welcher adjazent zu a ist, aber weiter von b entfernt ist als a dies ist.

Also gilt: $\delta(p, b) = \delta(a, b) + 1 = l + 1$.

Außerdem: $f(p, b) = \delta(p, b) - |\delta(p, u) - \delta(b, u)| = \delta(a, b) + 1 - |\delta(p, u) - \delta(b, u)|$

Es gilt $f(p, b) \leq f(a, b)$, weil ja $f(a, b)$ maximal gewählt war.

Daher folgt: $|\delta(p, u) - \delta(b, u)| \geq |\delta(a, u) - \delta(b, u)| + 1$.

Ebenso gilt aufgrund der Adjazenz von p zu a :

$|\delta(p, u) - \delta(b, u)| \leq |\delta(a, u) - \delta(b, u)| + 1$

Es gilt also Gleichheit und somit: $f(a, b) = f(p, b)$.

Das heisst: $(p, b) \in S$ und man erhält somit einen Widerspruch zur Wahl von (a, b) .

Zur Erinnerung: Es sollte $|\delta(a, u) - \delta(b, u)|$ maximal gewählt werden.

Dieser Widerspruch impliziert, dass die Annahme ($a \neq u$ und $a \neq v$) falsch und somit $a = u$ oder $a = v$ sein muss. Analog beweist man, dass $b = u$ oder $b = v$ sein muss. Es gilt also $(a, b) = (u, v)$ oder $(a, b) = (v, u)$, da ja keine Schleifen erlaubt sind. \blacklozenge

Hieraus folgt, dass $f_0 = f(u, v) = 0$ und somit $f(x, y) = 0 \forall x, y \in V(B)$

Behauptung 2: $c_n = 1$

Beweis (Behauptung 2):

Angenommen $c_n > 1$, dann hat u mindestens zwei verschiedene Nachbarn x und y , welche eine kürzere Distanz zu v haben als u . Damit gilt:

$f(x, y) = \delta(x, y) - |\delta(x, u) - \delta(y, u)| = \delta(x, y) > 0$

(genaugenommen = 2 wegen der Bipartition)

Dies ergibt einen Widerspruch, da zuvor gezeigt wurde, dass $f(p, q) = 0 \forall p, q \in V(B)$. Da $c_n \geq 1$ gilt, folgt also $c_n = 1$ \blacklozenge

Hiermit ist nun das Theorem gezeigt (Beweis durch Kontraposition). □

Korollar 3.0.4. *Jeder bipartite distanz-reguläre Graph G mit mindestens einem Kreis ist endlich und mit Durchmesser d , Grad k und Tailenweite g genügt er der Ungleichung $d \leq \frac{(k-1)(g-2)}{2} + 1$.*

Es gibt nur endlich viele solcher Graphen.

Beweis:

Sei $\{c_1 = 1, c_2, \dots, c_i, \dots; b_0 = k, b_1, \dots, b_i, \dots\}$ das Intersection Array von G . Da G einen Kreis enthält, gibt es eine Tailenweite $g < \infty$ und wegen der Bipartition ist g gerade. Aufgrund des Kreises gilt dann $c_{g/2} > 1$

Behauptung 1: $c_i \geq \frac{2i}{g-2} \forall i \geq 1$

Beweis (Behauptung 1): (per Induktion über i)

Induktionsanfang: Sei $1 \leq i < g/2$. Dann gilt $c_i = 1$, weil es sonst einen kleineren Kreis geben würde, was einen Widerspruch zur Definition von g führen würde.

Für $1 \leq i < g/2$ gilt $\frac{2i}{g-2} \leq 1 = c_i$

Induktionsvoraussetzung: Für $1 \leq l < i$ gelte $c_l \geq \frac{2l}{g-2}$ ($i \geq g/2$).

Induktionsschluss: Sei nun $i \geq g - 2$. Es folgt $c_i > 1$.

Das Theorem besagt, dass es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt mit $1 \leq j \leq i - 1$ und $c_j + c_{i-j} \leq c_i$.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgen jeweils $c_i \geq \frac{2i}{g-2}$ und $c_{i-j} \geq \frac{2(i-j)}{g-2}$, da j und $i - j$ kleiner als i sind.

Dies ergibt zusammen: $c_i \geq c_j + c_{i-j} \geq \frac{2j}{g-2} + \frac{2(i-j)}{g-2} = \frac{2i}{g-2}$ ◆

Die Ungleichung $c_i \geq \frac{2i}{g-2}$ ($\forall i \geq 1$) bedeutet allerdings, dass die Folge $\{c_i\}$ unbeschränkt wäre, was ein Widerspruch zum Grad k vom Graphen G ist. Somit ist die Endlichkeit gezeigt.

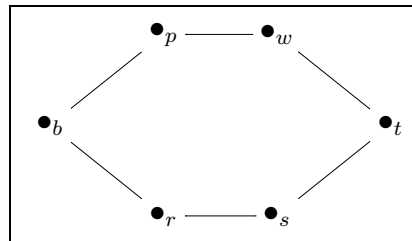
Desweiteren gilt für den Durchmesser d (weitester kürzester Weg im gesamten Graphen): $k - 1 \geq c_{d-1}$, denn auf einem kürzestem Weg mit Distanz d (welcher ja aufgrund der Existenz von d existiert), besitzt der Knoten vor dem Endknoten ja bereits den Endknoten als Nachbarn. Es bleiben somit maximal $k - 1$ adjazente Knoten für $S_{d-2,1,u,v}$.

Somit gilt die Ungleichung: $k - 1 \geq c_{d-1} \geq \frac{2(d-1)}{g-2}$ bzw. nach d umgeformt:

$$d \leq \frac{(k-1)(g-2)}{2} + 1$$

Dass es nur endlich viele solcher Graphen gibt folgt aus der endlichen Knotenmenge. (Endliche Vereinigung endlicher Mengen ist wieder endlich) \square

4 Beispiel für einen distanz-regulären Graphen



Dieser Graph G mit Knotenmenge $V(G) = \{p, q, r, s, t, w\}$ und Kantenmenge $E(G) = \{(p, q), (q, r), (r, s), (s, t), (t, w), (w, p)\}$ ist distanz-regulär, hat einen kleinsten Kreis der Länge 6 ($= g$) sowie Grad $k = 2$. Der Durchmesser d beträgt 3 (z.B. Weg von p nach s). Die Ungleichung ist somit erfüllt, denn es gilt:

$$3 = d \leq \frac{(k-1)(g-2)}{2} + 1 = \frac{(2-1)(6-2)}{2} + 1 = \frac{1 \cdot 4}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$$

Zur Verdeutlichung der Bedeutung von Distanz-Regularität betrachte $|S_{i,j,u,v}|$. Ist beispielsweise $i = 1$ und $j = 2$, so wäre zunächst nicht klar, welche Knoten u und v betrachtet werden müssten. Zum Beispiel hat q Distanz 1 zu p und Distanz 2 zu s , genauso aber t Distanz 1 zu w und 2 zu r . Distanz-Regularität bedeutet, dass dies keinen Unterschied macht, welche Knoten ich betrachte, solange diese nur die Distanzvorgabe erfüllen. Die Kardinalität der Menge bleibt dann immer gleich.

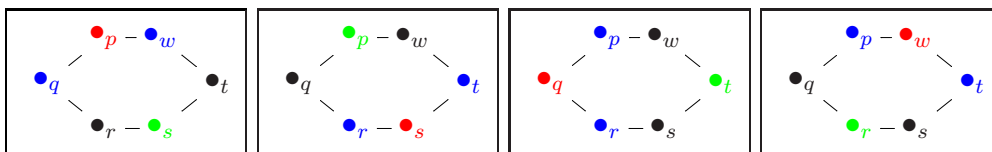


Abbildung 1: 1) $S_{1,2,a,d}$ 2) $S_{1,2,d,a}$ 3) $S_{1,2,b,e}$ 4) $S_{1,2,b,c}$ ($\delta(u, v) = 3; i = 1; j = 2$)

Abbildung 1 zeigt 4 von 6 möglichen $S_{i,j,u,v}$ -Mengen für $\delta(u, v) = 3, i = 1$ und $j = 2$. Rot eingefärbt dabei der Knoten u , grün der Knoten v und blau die Knoten der $S_{i,j,u,v}$ -Menge. Es wird deutlich, dass die Kardinalität für diese Werte immer 2 beträgt. Genauso erhält man bei anderen Werten für $\delta(u, v), i, j$ stets eine einheitliche Kardinalität. Zum Beispiel ist sie für $\delta(u, v) = 3, i = 1$ und $j = 1$ stets 0, denn: $S_{1,1,u,v} = \emptyset \forall u, v : \delta(u, v) = 3$.