

Finden von zwei disjunkten Pfaden zwischen zwei Knoten-Paaren in einem Graph

1. Einleitung

- **Notation**

$P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$ und $\neg P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$

- **Versionen des Problems**

		Pfad	
		Knoten-disjunkt V	Kanten-disjunkt E
Graph	gerichtet D	DVP2	DEP2
	ungerichtet U	UVP2	UEP2

- **Das allgemeine Problem**

- **Problem 1:**

$k + 1$ paarweise disjunkte Pfade

k zwischen s_1 und t_1

1 zwischen s_2 und t_2

⇒ NP-vollständig

- **Problem 2:**

k paarweise disjunkte Pfade zwischen k Knoten

⇒ NP-vollständig, da Problem 1 > Problem 2

2. Reduktionen und Beziehung zum Zusammenhang

- **Reduktionen zwischen den Versionen**

- $DVP2 > DEP2$

- $DEP2 > DVP2$

- $UVP2 > DVP2$

- $UEP2 > UVP2$

⇒ $UEP2 > UVP2 > DVP2 \equiv DEP2$

- **P2 und Zusammenhang**

- G 3-Kanten-zusammenhängend, ungerichtet ⇒ $UEP2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$

Beweis: es existieren drei disjunkte Pfade $P_1(s_1, t_1), P_2(s_1, s_2), P_3(s_1, t_2)$

⇒ $P_1(s_1, t_1)$ und $Q(s_2, t_2) = P_2(s_1, s_2) * P_3(s_1, t_2)$ sind disjunkte Pfade

- $G \left\{ \begin{array}{l} 5\text{-Knoten-zusammenhängend} \\ 4\text{-Knoten-zusammenhängend} \\ 6\text{-Knoten-zusammenhängend} \end{array} \right. \begin{array}{l} \neq UVP2 \\ \text{nichtplanar} \\ \Rightarrow UVP2 \end{array}$

- $\min K_1$ -Knoten-zusammenhängend, sodass $DVP2$? (bekannt: $K_1 \geq 3$)

- $\min K_2$ -Kanten-zusammenhängend, sodass $DEP2$?

3. Effiziente Algorithmen

- **$O(|V| * |E|)$ Algorithmus für DVP2 in**
 - azyklischen, gerichteten Graphen

$O(|V| * |E|)$ Algorithmus für DVP2 in azyklischen gerichteten Graphen

1. Entferne alle von t_1 und t_2 ausgehenden Kanten (können nicht Teil einer Lösung sein)
 $\Rightarrow t_1$ und t_2 sind Senken in G
2. Für alle $v \in V$ berechne $l(v) :=$ Länge eines längsten von v ausgehenden Pfades
3. Konstruiere $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ mit
$$\bar{V} = \{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V \text{ und } u \neq v\}$$
$$\bar{E} = \{\langle u, v \rangle \rightarrow \langle u, w \rangle \mid v \rightarrow w \in E \text{ und } l(v) \geq l(u)\}$$
$$\cup \{\langle v, u \rangle \rightarrow \langle w, u \rangle \mid v \rightarrow w \in E \text{ und } l(v) \geq l(u)\}$$
4. Suche in \bar{G} nach einem Pfad $P(\langle s_1, s_2 \rangle, \dots, \langle t_1, t_2 \rangle)$
 $\exists P \Rightarrow P2$
 $\nexists P \Rightarrow \neg P2$

Beweis: $P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G) \Leftrightarrow \exists P(\langle s_1, s_2 \rangle, \dots, \langle t_1, t_2 \rangle)$ in \bar{G}

„ \Rightarrow “ per Induktion über $L(P_1) + L(P_2)$

$$L(P_1) + L(P_2) = 2$$

Dann ist $P_1 = (s_1, t_1)$ und $P_2 = (s_2, t_2)$

1. Fall: $l(s_1) \geq l(s_2)$:

dann ist $P = (\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle t_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle t_1, t_2 \rangle)$ in \bar{G}

2. Fall: $l(s_1) < l(s_2)$

dann ist $P = (\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle s_1, t_2 \rangle \rightarrow \langle t_1, t_2 \rangle)$ in \bar{G}

$$L(P_1) + L(P_2) > 2$$

Sei $P_1 = (s_1 = v_1, \dots, v_k = t_1)$ und $P_2 = (s_2 = w_1, \dots, w_m = t_2)$

1. Fall: $l(s_1) \geq l(s_2)$:

dann ist $\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle v_2, s_2 \rangle$ erste Kante in P

Rest von P folgt per Induktionsannahme mit $P'_1 = (v_2, \dots, v_k = t_1)$ und P_2

2. Fall: $l(s_1) < l(s_2)$

dann ist $\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle s_1, w_2 \rangle$ erste Kante in P

Rest von P folgt per Induktionsannahme mit P_1 und $P'_2 = (w_2, \dots, w_m = t_2)$

„ \Leftarrow “ per Induktion über $L(P)$

$$L(P) = 2$$

dann ist $s_1 \rightarrow t_1 \in E$ und $s_2 \rightarrow t_2 \in E$

und $P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$

$L(P) > 2$

Sei $P = (\langle s_1, s_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle, \dots, \langle v_k, w_k \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle)$,

dann sind $P_1(s_1 = v_1, \dots, v_k = t_1)$ und $P_2(s_2 = w_1, \dots, w_m = t_2)$ gerichtete Pfade in G von s_1 nach t_1 und von s_2 nach t_2 .

Nach Definition von \bar{G} gilt für jedes $1 \leq i < k$

entweder $v_i = v_{i+1}$ und $w_i \neq w_{i+1}$,

oder $v_i \neq v_{i+1}$ und $w_i = w_{i+1}$

und somit $L(P_1) + L(P_2) = L(P)$

1. Fall: $\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle v_1, s_2 \rangle$ ist erste Kante von P

dann ist $l(s_1) \geq l(s_2)$

per Induktionsannahme sind $P_1'(v_2, \dots, v_k = t_1)$ und P_2 disjunkt

s_2 ist der erste Knoten von P_2 und somit $l(w_j) < l(s_2)$ für $j = 2, \dots, k$.

Mit $l(s_1) \geq l(s_2)$ und $s_1 \neq s_2$ folgt $s_1 \notin P_2$ und somit P_1 und P_2 disjunkt.

2. Fall: $\langle s_1, s_2 \rangle \rightarrow \langle s_1, w_2 \rangle$ ist erste Kante von P

∴ (symmetrisch zum 1. Fall)

■

- **$O(|E|)$ Algorithmus für UVP2 in 3-zusammenhängenden**
 - planaren Graphen
 - chordalen Graphen

$O(|E|)$ Algorithmus für UVP2 in 3-zusammenhängenden, planaren Graphen

1. Existiert eine planare Darstellung von G , sodass vier Knoten in der Reihenfolge s_1, t_1, s_2, t_2 in einem Face F liegen, dann $\neg P2$, STOPP (Theorem 1)
2. Finde drei disjunkte Pfade $P_i(s_1, t_1)$ und drei disjunkte Pfade $Q_j(s_2, t_2)$ (Theorem 2)
3. Ändere die P_i , wenn $u, v \in Q_j \cap P_i$ und $Q_j[u, v] - \{u, v\} \cap P_k = \emptyset$ für $k = 1, 2, 3$ dann $P_i[u, v] = Q_j[u, v]$ (Lemma 1)
4. Überprüfe für jedes der Q_j folgende Bedingungen und bestimme die $v_{j,i}$ und $w_{j,i}$:
 - a $Q_j \cap P_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, 3$ (Lemma 5)
 - b Alle Q_j schneiden die P_i zum ersten Mal in der gleichen Reihenfolge (P_1, P_2, P_3) (Lemma 4)
 - c P_3 ist der letzte P -Pfad, der von Q_j geschnitten wird (Lemma 2)
 - d Für $u \in P_1 \cap Q_j, v \in P_3 \cap Q_j$ gilt: $Q_j[u, v] \cap P_2 \neq \emptyset$ (Lemma 3)
 Ist eine der Bedingungen a bis d nicht erfüllt:
 Konstruiere zwei disjunkte Pfade $P_1(s_1, t_1)$ und $P_2(s_2, t_2)$ gemäß Lemma 2 bis 5
 STOPP
5. 1. Fall:
 Existiert ein Pfad $Q_j[s_2, t_2]$ in $G - P_2$:
 Disjunkte Pfade sind Q und P_2
 STOPP
6. 2. Fall:
 Sei $Q(s_2, t_2) = Q_2[s_2, v_{2,2}] * P_2[v_{2,2}, w_{2,2}] * Q_2[w_{2,2}, t_2]$
 Finde Pfad $P(s_1, t_1)$ in $G - Q$
 Disjunkte Pfade sind Q und P

Verwendete Notationen:

$v_{j,i}$ ($w_{j,i}$) ist der erste (letzte) gemeinsame Knoten von Q_j und P_i

$P[u, v]$ ist der Teilpfad von P zwischen u und v

$P_1(u, v) * P_2(v, w) = P(u, w)$ entsteht durch Konkatenation von $P_1(u, v)$ und $P_2(v, w)$

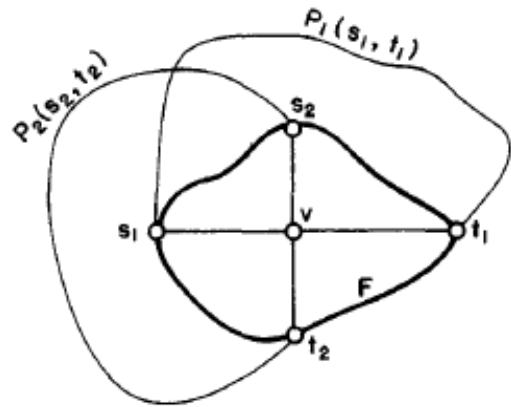
Theorem 1

Sei G ein planarer Graph. Existiert eine planare Darstellung von G , sodass vier Knoten in der Reihenfolge s_1, t_1, s_2, t_2 in einem Face F liegen, dann $\neg P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$.

Beweis: Angenommen $P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$

Konstruiere einen Graphen G' durch Hinzufügen eines Knotens v und vier Kanten $(v, s_1), (v, s_2), (v, t_1), (v, t_2)$. Der Graph G' ist ebenfalls planar (v kann innerhalb von F platziert werden).

Der Teilgraph von G' bestehend aus zwei disjunkten Pfaden $P_1(s_1, t_1)$ und $P_2(s_2, t_2)$, sowie F, v und den vier neu hinzugefügten Kanten bilden den vollständigen Graphen K_5 .



Dieser ist nach Kuratowskis Theorem nicht planar, ein Widerspruch. ■

Theorem 2

Sei G ein planarer Graph und s_1, t_1, s_2, t_2 vier Knoten in G .

- Existiert keine planare Darstellung von G , sodass die Knoten s_1, s_2, t_1, t_2 in einem Face in dieser Reihenfolge liegen
- dann existieren drei disjunkte Pfade P_1, P_2, P_3 zwischen s_1 und t_1 und drei disjunkte Pfade Q_1, Q_2, Q_3 zwischen s_2 und t_2

Theorem 1 und 2 führen zu folgendem Theorem:

Theorem 3

Sei G ein 3-zusammenhängender planarer Graph.

Dann $P2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$, wenn keine planare Darstellung von G existiert, mit einem Face mit der Reihenfolge s_1, s_2, t_1, t_2 .

Beweisskizze von Theorem 2:

(Beweis durch Herleiten einer Anordnung der Pfade)

Angenommen $\neg P2$ und die Bedingungen (a) und (b) aus Theorem 2

Lemma 1

Man kann annehmen, dass für ein $1 \leq i \leq 3$, (1) $u, v \in Q_j \cap P_i$ und (2) $Q_j[u; v] \cap P_k = \emptyset$ für $k \neq i$ gilt: $P_i[u; v] = Q_j[u; v]$.

Lemma 2

P_3 ist der letzte P -Pfad, der die Q_j schneidet.

Lemma 3

Sei $v_1 \in Q_1 \cap P_1, v_3 \in Q_1 \cap P_3$, dann $Q_1[v_1, v_3] \cap P_2 \neq \emptyset$

Lemma 4

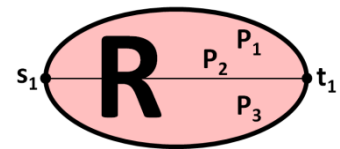
Alle Q_j schneiden die P_i zum ersten Mal in der Reihenfolge P_1, P_2, P_3 .

Lemma 5

Lemma 2 und 3 gelten für alle Q_j .

Lemma 6

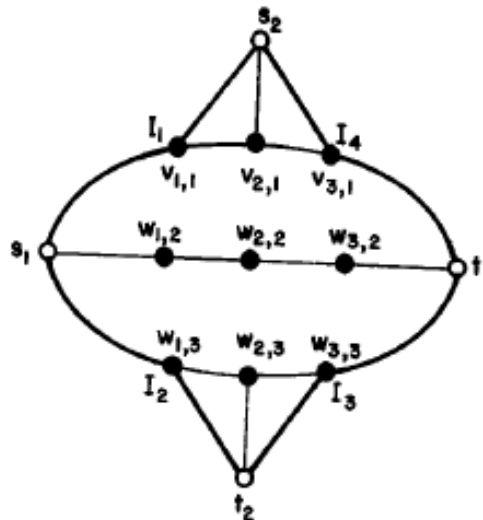
Die Knoten s_2 und t_2 liegen entweder außerhalb der Region R oder auf ihrer Grenze.



Lemma 7

Die Knoten $w_{1,i}, w_{2,i}, w_{3,i}$ liegen in dieser Reihenfolge auf P_i für $i = 2, 3$.

Zusammenfassende Darstellung der aus Lemma 1 bis 7 hergeleiteten Anordnung der Pfade:



$$\begin{aligned}
 I_1 &:= Q_1[s_2, v_{1,1}] * P_1[v_{1,1}, s_1] & I_2 &:= P_3[s_1, w_{1,3}] * Q_1[w_{1,3}, t_2] \\
 I_3 &:= Q_3[t_2, w_{3,3}] * P_3[w_{3,3}, t_1] & I_4 &:= P_1[t_1, v_{3,1}] * Q_3[v_{3,1}, s_2]
 \end{aligned}$$

$$F := I_1 * I_2 * I_3 * I_4,$$

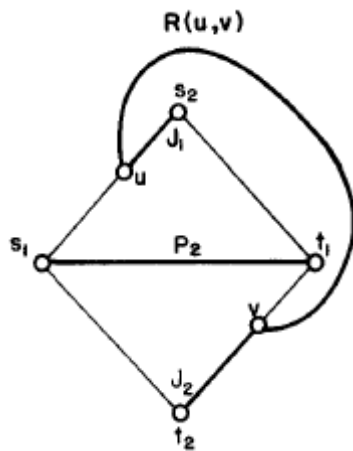
wobei die Umrandung von F nach Bedingung (a) kein Face von G ist

$$\begin{aligned}
 J_1 &:= I_1 * I_4 - \{s_1, t_1\} & J_2 &:= I_2 * I_3 - \{s_1, t_1\} \\
 J_3 &:= I_1 * I_2 - \{s_2, t_2\} & J_4 &:= I_3 * I_4 - \{s_2, t_2\}
 \end{aligned}$$

Dies führt zu einem der zwei folgenden Fälle:

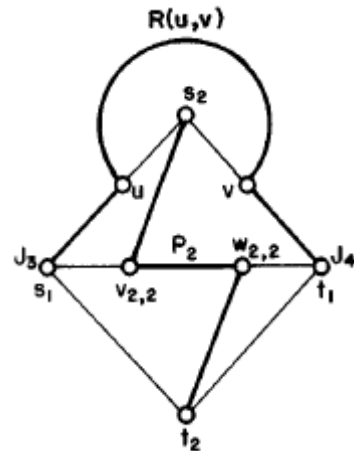
1. Fall:

$\exists u \in J_1, v \in J_2$ und eine Pfad $R(u, v)$.



2. Fall:

$\exists u \in J_3, v \in J_4$ und eine Pfad $R(u, v)$.



Alle Knoten von R , ausgenommen u und v , liegen außerhalb von F .

In beiden Fällen existieren zwei disjunkte Pfade:

$$\begin{aligned} P(s_1, t_1) &= P_2 \\ Q(s_2, t_2) &= J_1[s_2, u] * R(u, v) * J_2[v, t_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(s_1, t_1) &= J_3[s_1, u] * R(u, v) * J_4[v, t_1] \\ Q(s_2, t_2) &= Q_2[s_2, v_{2,2}] * P_2[v_{2,2}, w_{2,2}] \\ &\quad * Q_2[w_{2,2}, t_2] \end{aligned}$$

Ein Widerspruch zu $\neg P_2$.

■

$O(|E|)$ Algorithmus für UVP2 in 3-zusammenhängenden, chordalen Graphen

1. Finde einen kürzesten Pfad $P_1(s_1, t_1)$ in $G - \{s_2, t_2\}$
2. Finde einen Pfad $P_2(s_2, t_2)$ in $G - P_1$

Theorem 1

Jedes minimale separierende Set S in einem chordalen Graphen ist eine Clique.

Theorem 2

Wenn G ein 3-zusammenhängender chordaler Graph ist, dann $UVP2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$ für vier beliebige Knoten s_1, t_1, s_2 und t_2 .

Beweis von Theorem 2:

Angenommen $\neg UVP2(s_1, t_1; s_2, t_2; G)$

Sei $P(s_1, t_1)$ ein minimaler Pfad, der nicht durch die Knoten s_2 und t_2 verläuft (existiert, da G 3-zusammenhängend).

Die Knoten von P bilden ein separierendes Set zwischen s_2 und t_2 .

Sei $S' \subseteq P$ ein minimales separierendes Set zwischen s_2 und t_2 .

$|S'| \geq 3$, da G 3-zusammenhängend.

Nach Theorem 1 ist S' eine Clique. Ein Widerspruch dazu, dass P minimal ist. ■