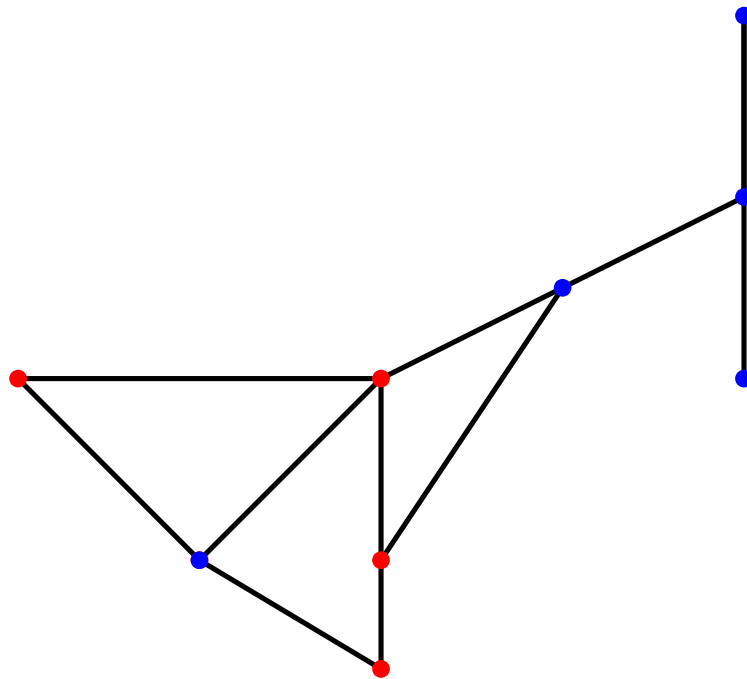


# Knoten-Partitionierung in feste Eigenschaften ist NP-schwer

Seminar: Ausgewählte Kapitel der Informatik  
bei Prof. Dr. R. Schrader  
Seminarvortrag von Nils Rosjat



## 1 Einleitung

Dieser Seminarvortrag befasst sich mit der Frage, ob man die Knoten eines beliebigen Graphen  $G$  in zwei Mengen  $A \cup B$  partitionieren kann, sodass  $G[A]$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  und  $G[B]$  die Eigenschaft  $\mathcal{Q}$  erfüllen. Ein Beispiel dafür wäre die Frage, ob man  $V(G)$  in zwei Mengen  $A \cup B$  aufteilen kann, sodass  $G[A]$  ein Line-Graph und  $G[B]$  ein Wald ist.

Es wird gezeigt werden, dass dieses Problem, bis auf die Ausnahme  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  sind beide endliche kantenlose Graphen, NP-schwierig ist.

Zunächst werden einige für die späteren Beweise notwendigen Definitionen vorgenommen.

### Definition 1.1 (additiv induziert-vererbbar)

*Eine Eigenschaft  $\mathcal{P}$  heißt additiv induziert-vererbbar, wenn sie abgeschlossen unter knotendisjunkten Vereinigungen ist und alle Teilgraphen die Eigenschaft wieder erfüllen.*

### Definition 1.2 ( $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung)

*Eine  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung ist eine Partitionierung von  $V(G)$  in rote und blaue Knoten, sodass die roten Knoten einen Subgraphen  $G_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$  und die blauen Knoten einen Subgraphen  $G_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}$  induzieren.*

### Definition 1.3 (Minimal verbotener Teilgraphen)

*Die Menge der minimal verbotenen Teilgraphen von  $\mathcal{P}$  ist definiert durch*

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) := \{H \notin \mathcal{P} \mid \forall G < H, G \in \mathcal{P}\}$$

*Das heißt es ist die Menge aller Graphen  $H$ , die die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  nicht erfüllen, aber deren jegliche Untergraphen die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  erfüllen. Sie sind in diesem*

*Sinne minimal nicht erlaubt.*

**Beispiel**  $\mathcal{F}(\text{Wald}) = \{\text{Kreise mit Länge } k \geq 3\}$

### **Satz 1.1**

*Wenn  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  additive induziert-vererbte Eigenschaften sind, dann lässt sich  $\mathcal{A}$ -Erkennung auf  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ -Erkennung reduzieren.*

#### **Bemerkung**

1. Das heißt, dass  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ -Identifizierung NP-schwer ist, wenn  $\mathcal{A}$ -Identifizierung und  $\mathcal{B}$ -Identifizierung NP-schwer sind.
2. Das bedeutet, dass es immer einen  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -färbbaren Graphen gibt, da man aus einem Graphen mit der Eigenschaft  $\mathcal{A}$  in polynomieller Zeit einen Graphen mit den Eigenschaften  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  erstellen kann.

## **2 Beweis NP-Vollständigkeit**

Um die NP-Schwierigkeit des Problems zu zeigen wird eine Reduktion von p-IN-r-SAT auf  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung durchgeführt.

**Bemerkung** p-IN-r-SAT ist das Problem zu entscheiden, ob eine beliebige Formel mit Klauseln der Länge  $r$  eine erfüllende Belegung mit genau  $p$  als wahr gekennzeichneten Literalen hat. Schaefer zeigte die NP-Vollständigkeit dieses Problems für  $1 \leq p < r$ ,  $r \geq 3$ .

Für den Beweis des folgenden Satzes wird eine Version des p-IN-r-SAT benutzt und zwar die p-IN-r-Färbung. Dabei verwendet man einen  $r$ -uniformen Hypergraph (das bedeutet, dass jede Hyperkante  $r$  Knoten verbindet) als Instanz und betrachtet das Problem, ob es möglich ist eine Menge von Knoten  $U$  zu finden, sodass für jede Hyperkante  $e$  gilt, dass  $|U \cap e| = p$ .

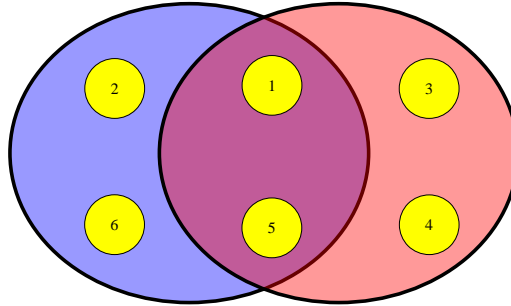


Abbildung 1: Beispiel eines 4-uniformen Hypergraphen

### Satz 2.1

#### *Voraussetzungen*

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  sind additive induziert-vererbgbare Eigenschaften mit  $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} \neq \mathcal{O}^2$

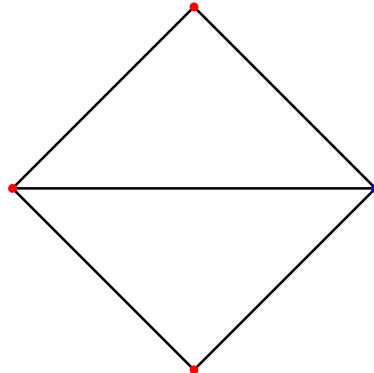
#### *Behauptung*

$(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Erkennung ist NP-schwer. Des Weiteren ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Erkennung NP-vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{P}$ - und  $\mathcal{Q}$ -Erkennung sind beide in NP.

#### *Beweis*

Es kann mittels Satz 1 gezeigt werden, dass es einen eindeutig  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -färbbaren Graphen  $G_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  gibt. Sei die Partition  $V(G_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = U_{\mathcal{P}} \cup U_{\mathcal{Q}}$ , dann wähle nun ein  $u \in U_{\mathcal{P}}$ . Wenn  $G_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} \leq H$  und  $v \notin V(G_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}})$  erfüllt  $N(v) \cap U_{\mathcal{Q}} = N(u) \cap U_{\mathcal{Q}}$ , dann muss  $v$  in jeder  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung von  $H$  im  $\mathcal{P}$ -Teil sein, da sonst  $U_{\mathcal{Q}} \cap v$  die Eigenschaft  $\mathcal{Q}$  erfüllt und somit auch  $U_{\mathcal{Q}} \cap u$ , da  $u$  die gleichen Nachbarn in  $U_{\mathcal{Q}}$  hat wie  $v$ . Analog kann man dies für ein Element  $w \in U_{\mathcal{Q}}$  durchführen.

**Beispiel**  $\{Wald, \mathcal{O}\}$



Ein möglicher  $G_{Wald, \mathcal{O}}$

Ein Block eines Graphen  $G$  ist ein zusammenhängender Teilgraph von  $G$  der maximal einen Schnittknoten des ursprünglichen Graphen enthält. Sei nun  $B_P$  ein Block von  $F_P \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$  mit den wenigsten Knoten aller Blöcke von Graphen in  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ . Da  $\mathcal{P}$  additiv und nicht trivial ist ist  $F_P$  zusammenhängend und hat  $k \geq 2$  Knoten, das heißt  $|B_P| \geq 2$ . Die wichtige Eigenschaft hiervon ist, dass man, falls  $H \in \mathcal{P}$  gilt und man einen Block mit weniger als  $k$  Knoten hinzufügt, einen neuen Graphen in  $\mathcal{P}$  erhält, da jeder echte Teilgraph  $T$  von Graphen in  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  erfüllt. Somit folgt aus der induzierten Vererbbarkeit von  $\mathcal{P}$ , dass  $H \cup T \in \mathcal{P}$

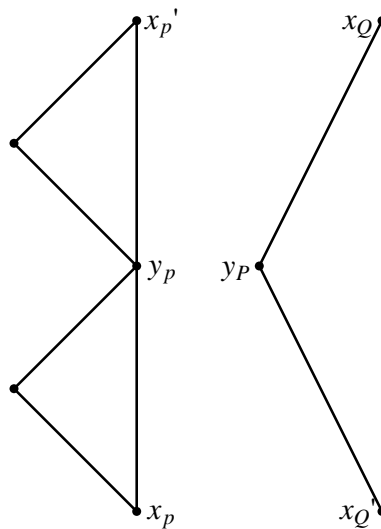
Sei nun  $y_P$  der einzige Schnittknoten in  $B_P$  und  $x_P$  ein Knoten in  $B_P$  der adjazent zu  $y_P$  ist. Dann ist  $F'_P$  der Graph erhalten durch Hinzufügen einer Kopie von  $B_P$  inzident zu  $y_P$ . Nun sei  $x'_P$  ein Knoten in der neuen Kopie, welcher adjazent ist zu  $y_P$ . Analoges wendet man auf  $Q$  an und erhält die Knoten  $x_Q, y_Q$  und  $x'_Q$ .

Im nächsten Schritt identifizieren wir  $x_P$  mit  $x_Q$  als  $x$ ,  $y_P$  mit  $y_Q$  als  $y$ ,  $x'_P$  mit  $x'_Q$  als  $x'$ . Nun zwingt man alle Knoten aus:  $F'_P \in \mathcal{P}$ ,  $F'_Q \in \mathcal{Q}$  bis auf  $x, y$  und  $x'$ . Die geschieht indem man eine Kopie von  $G_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  hinzufügt und die Knoten aus dem  $P$ -Teil adjazent macht zu jedem Nachbar von  $u$  in  $U_Q$  und die Knoten aus dem  $Q$  Teil adjazent zu jedem Nachbar

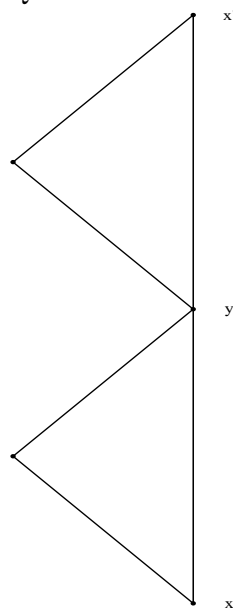
von  $w$  in  $U_P$  (wie am Anfang des Beweises erläutert).

Dieses Werkzeug nennen wir "Replicator"  $R$ . Es kann gezeigt werden, dass es die Farbe von  $x$  auf  $x'$  repliziert und korrekte Färbungen erhält.

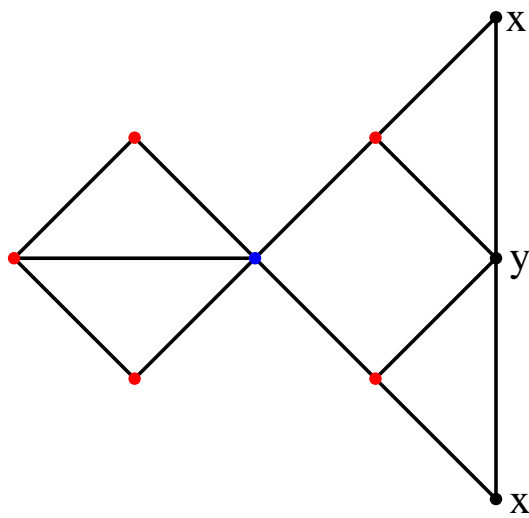
**Beispiel**  $\{Wald, \mathcal{O}\}$



$F'_P$  und  $F'_Q$  werden verändert zu:



$F'_{P,Q}$  und dies wird verändert zu:



*Replicator-Gadget*

Wählt man nun  $H_{\mathcal{P}} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$  mit  $p + 1$  Knoten, wobei  $p+1$  minimal sein soll und ebenso  $H_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{F}(\mathcal{Q})$  mit  $q+1$  Knoten. Da der Fall  $\mathcal{O}^2$  ausgeschlossen wurde (nach Voraussetzung) gilt  $p + q \geq 3$  und somit wäre  $p - IN - (p + q)$ -Färbung NP-vollständig. Es bleibt nun übrig eine Transformation auf  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung durchzuführen.

Für einen gegebenen  $(p+q)$ -uniformen Hypergraphen  $\mathcal{H}$ . Das heißt jede Hyperkante  $e$  besteht aus einer Menge  $S_e$  von  $p+q$  Knoten.

Wir werden jetzt ein Werkzeug entwickeln, das wir auf diese Mengen  $S_e$  anwenden. Sei nun also  $S$  eine Menge mit  $p+q$  Knoten  $\{x_1, \dots, x_{p+q}\}$ .

Für jede Teilmenge  $T_j$  von  $S$  mit  $(p + 1)$ - (bzw.  $(q+1)$ -) Elementen füge man eine disjunkte Kopie von  $H_{\mathcal{P}}$  (bzw.  $H_{\mathcal{Q}}$ ) mit den Knoten  $x_1^j, \dots, x_{p+1}^j$  hinzu. Jetzt benutzt man für jeden Knoten

$x_i^j$  ( $i = 1, \dots, p + 1$ ) eine Kopie  $R_{i,j}$  um zu versichern, dass  $x_i$  und  $x_i^j$  immer die gleiche Farbe haben, indem man die Knoten  $x$  und  $x'$  von  $R$  mit  $x_i$  bzw.  $x_i^j$  identifiziert (die gleiche Färbung folgt aus Behauptung 1).

Somit hat jeder Knoten  $x_i \in S$  genau  $l = \binom{p + q - 1}{p} + \binom{p + q - 1}{q}$

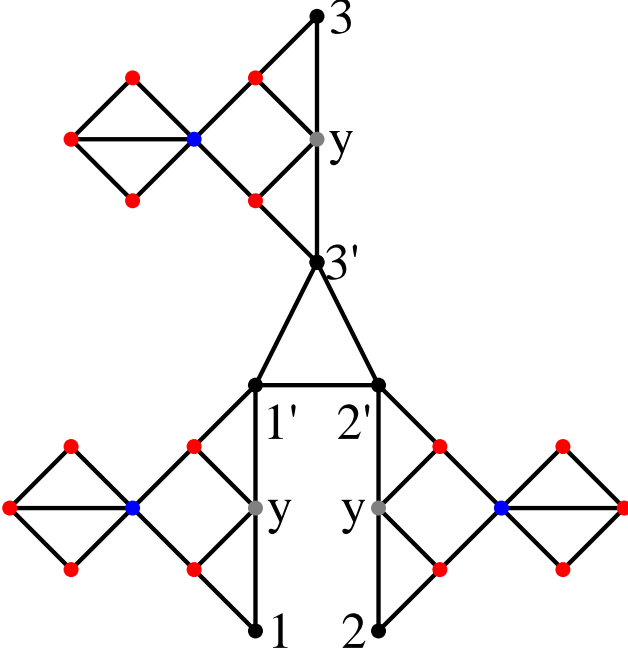
“Schattenknoten”  $x_i^1, \dots, x_i^l$  durch Kopien von  $H_{\mathcal{P}}$  und  $H_{\mathcal{Q}}$ . Dies ist unser gesuchtes Werkzeug und wir nennen es  $N$ .

In einer  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung von  $N$  können keine  $p+1$  Knoten von  $S$  in  $\mathcal{P}$  und keine  $q+1$  Knoten in  $\mathcal{Q}$  sein und somit sind genau  $p$  Knoten von  $S$  in  $\mathcal{P}$  und  $q$  Knoten in  $\mathcal{Q}$ .

Angenommen es sind genau  $p$  Knoten von  $S$  rot und genau  $q$  Knoten blau und man färbe jeden Schattenknoten  $x_i^j$  genau wie  $x_i$ . Dann hat jedes  $H_{\mathcal{P}}$  maximal  $p$  rote und jedes  $H_{\mathcal{Q}}$  maximal  $q$  blaue Knoten, das heißt man erhält eine erlaubte  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung, da jeder Teilgraph von  $H_{\mathcal{P}}$  mit echt weniger als  $p+1$  Knoten die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  erfüllt (gleiches gilt für  $\mathcal{Q}$ ). Die Färbung auf  $R_{i,j}$  ist damit festgelegt und wir erhalten eine  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung von  $N$ .

Wenden wir dieses  $N$  nun auf jede Kante  $e$  an, so erhalten wir genau dann eine  $p - IN - (p + q)$ -Färbung, wenn der erhaltene Graph  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -färbbar ist und somit ist auch  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ -Färbung NP-schwierig.  $\square$

Beispiel für eine Kante  $\{1, 2, 3\}$



Beispiel für eine Kopie von  $H_P$  bei der Teilmenge  $\{1, 2, 3\}$  der Kante