Kantenmenge in maximal dreiecksfreien Graphen und minimalen Graphen mit Durchmesser 2

Fachbereich Informatik

Seminararbeit

im Studiengang Wirtschaftsmathematik

Thema: Maximale dreiecksfreie Graphen
Minimale Graphen mit Durchmesser 2

eingereicht von: Dilani Nalliah <lashvini85@yahoo.de>

eingereicht am: 25. Januar 2010

Betreuer: Herr Prof. Dr. R. Schrader

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Ausarbeitung geht es um das Paper: ***Size in maximal triangle-free- graphs and minimal graphs of diameter 2***, welches von *Curtis Barefoot, Karan Casey, David Fisher, Kathryn Fraughnaugh und Frank Harary bearbeitet wurde.*

Hier behandeln wir das Thema: maximal dreiecksfreien Graphen und minimalen Graphen die den Durchmesser zwei haben. Genauer gesagt, wollen wir heraus finden, wie sich die Kantenmenge bei solchen Graphen ändert.

Bevor wir die Kantenmengen untersuchen, definieren wir uns zunächst einmal, was maximal dreiecksfreie Graphen sind; was die minimalen Graphen mit Durchmesser zwei damit zu tun haben und warum diese für uns wichtig sind.

1.1 Definitionen

1.1.1 ($maximal\ dreiecksfreie\ Graphen$)

Definition:
Ein Graph ist genau dann dreiecksfrei, wenn er keinen Kreis der Länge 3 hat. Dieser ist genau dann maximal, wenn bei Hinzunahme einer beliebigen Kante ein Dreieck entsteht.

1.1.2 ($Distanz$)

Definition:
Seien $\{x, y\} \in V(G)$. Dann entspricht die Distanz/Abstand zwischen x und y
$d_G(x, y) =$ Länge eines kürzesten Weges in G, welcher x und y verbindet.

1.1.3 ($Durchmesser$)

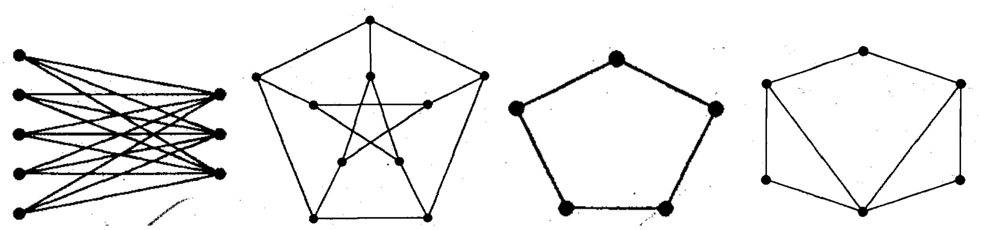
Definition:
Der Durchmesser von G ist $d(G) = \max_{x,y \in V(G)} d_G(x, y)$

1.1.4 ($minimale\ Graphen\ mit\ Durchmesser\ zwei$)

Definition:
Dieser Graph mit Durchmesser zwei ist genau dann minimal, wenn eine beliebige Kante entfernt Ein Graph mit Durchmesser zwei ist genau dann minimal, wenn durch Entfernen einer beliebigen Kante der Durchmesser des Graphen erhöht wird.

2 Beispiel

In den nachfolgenden Abbildungen sehen wir Beispiele für MTF-(maximal triangle-free graphs) und MD2-(minimal graphs of diameter 2) Graphen.



(a) Abb.1 (b) Abb.2 (c) Abb.3 (d) Abb.4

Abbildung 1, 2 und 3 entsprechen einen MTF- Graph, wohingegen Abbildung 4 einen Graphen mit Durchmesser 2 darstellt, der jedoch nicht dreiecksfrei ist.

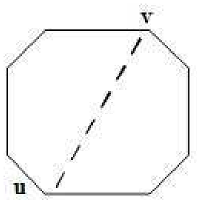
3 Theorem I

Mit diesem Theorem werden wir zeigen, dass alle MTF- Graphen auch MD2- Graphen sein müssen. Andererseits muss nicht jeder MD2- Graph ein MTF- Graph sein, welches auch in der obigen Abbildung 4 zu sehen ist.

Theorem 1:
Sei G ein dreiecksfreier Graph.Dann ist G maximal dreiecksfrei genau dann, wenn G ein dreiecksfreier MD2-Graph ist.

<u>**Beweis**:</u>
" $\Rightarrow$ "

- Sei G ein MTF- Graph : $G = (E, V)$
- wähle zwei Knoten $u, v \in V$ wobei $d(u, v) > 2$ ist, d.h. die Distanz echt größer 2, sodass wir mindestens 3 Kanten von u nach v durchlaufen müssen
- dann kann die Kante (u, v) hinzugenommen werden, ohne ein Dreieck zu bilden (s.Abb. 5)
- das ist aber ein Widerspruch dazu, dass das ein MTF- Graph ist.
- somit ist schon mal gezeigt, dass dieser Graph einen Durchmesser von 2 haben muss.



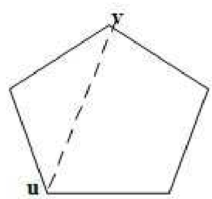
(a) Abb.5

- Nun müssen wir noch zeigen, dass der Durchmesser minimal ist.
- *Annahme*: Eine Kante (u, v) wird entfernt und $G \setminus \{u, v\}$ hat einen Durchmesser von zwei.
- dann ex. ein Weg der Länge 2 zwischen u und v in $G \setminus \{u, v\}$
- dieser Weg zusammen mit der Kante (u, v) bildet ein Dreieck in G
- dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass G ein dreiecksfreier Graph ist

- hieraus folgt nun, dass der Durchmesser von 2 auch minimal ist.

"$\Leftarrow$"

- Sei G ein dreiecksfreier MD2- Graph
- *zz*: Graph G ist maximal dreiecksfrei
- *Ann.*: Kante (u, v) ist in G hinzugefügt worden (s. Abb.6)
- da G D2 ist und kein Weg der Länge eins existiert zwischen u und v, muss es einen Weg der Länge zwei zwischen u und v in G geben
- dieser Weg zusammen mit der Kante (u, v) bilden einen Dreieck wie auch bei der Hinrichtung in $G \setminus \{u, v\}$
- somit folgt, dass dieser Graph ein MTF- Graph ist



(a) Abb.6

4 Theorem II

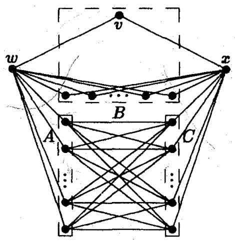
In diesem Theorem wird gezeigt, dass jeder n- knotige und zweizusammenhängende Graph mit Durchmesser 2 mindestens $2n-5$ Kanten haben muss. Dazu definieren wir uns zunächst das δ, welches den minimalen Grad von G angibt.

Beweis:
" $\Rightarrow$ "

- Sei G ein zweizusammenhängender Graph mit Durchmesser zwei
- *zz:* Graph hat mindestens $2n-5$ Kanten
- da der Graph zweizusammenhängend ist, ist $\delta \geq 2$
- denn wenn $\delta = 1$ ist, wird der Graph bei Entnahme dieses Knotens unzusammenhängend, was ein Widerspruch zur Annahme wäre
- d.h. bei $\delta \geq 4$ folgt aus dem Handschlaglemma[1] : $m \geq (\delta n)/2 \geq 2n$
- da es schon für $\delta = 4$ erfüllt ist, wird es auch für größer 4 erfüllt sein
- aus diesem Grunde brauchen wir nur noch die Fälle $\delta = 2$ und $\delta = 3$ betrachten

- ***Fall 1 :*** $\delta =$ 2
  - Sei Knoten $v \in V$ nur zu w und x adjazent
  - da G einen Durchmesser von 2 hat
    - Jeder Knoten aus $V \backslash \{w, x\}$ ist adjazent zu w, x oder beiden
  - definieren uns dazu drei Mengen A, B *und* C welches Partitionen von $V \backslash \{w, x\}$ sind
    - **A** Teilmenge $V \backslash \{w, x\}$, welches aus den Knoten besteht, die nur zu w adjazent sind.
    - **B** Teilmenge $V \backslash \{w, x\}$, ist die Menge von Knoten, die zu w und x adjazent sind.
    - **C** Teilmenge $V \backslash \{w, x\}$, ist die Knotenmengenmenge bestehend aus den Knoten, die nur zu x adjazent sind.
  - d.h. wir erhalten: $|A| + |B| + |C| = n - 2$ (Knoten)

[1] Handschlaglemma: Die Summe der Grade aller Knoten ist genau doppelt so groß wie die Anzahl seiner Kanten.



(a) Abb.7

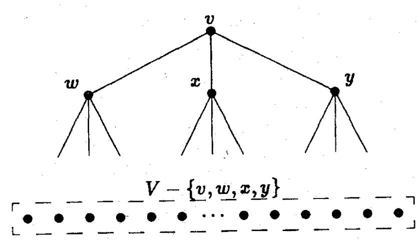
- *Ann:* $A = \emptyset$
- da G zweizusammenhängend, ist der induzierte Teilgraph $V \backslash \{x\}$ zusammenhängend und hat daher min n-2 Kanten.
  Einmal n-1 Kanten, damit dieser zusammenhängend bleibt und dann noch mal -1, weil wir $V \backslash \{x\}$ also $n-1$ Knoten betrachten. Dadurch erhalten wir für m :

- $m \geq |E(x,B)| + |E(x,C)| + |E(V \backslash \{x\})|$
  $\geq |B| + |C| + n - 2$
  $\geq n - 2 + n - 2$
  $= 2n - 4$

- Wenn $C = \emptyset \Rightarrow m \geq 2n-4$. Da Dies äquivalent ist zu $A = \emptyset$.
- nun nehmen wir an: $|A| \geq 1$ und $|C| \geq 1$
- da jeder Knoten aus A eine Distanz von maximal 2 zu jedem Knoten aus C hat
- hat der induzierte Graph $A \cup B \cup C$ eine Zusammenhangskomponente, welche alle Knoten aus $A \cup C$ beinhaltet
- und der induzierte Graph $A \cup B \cup C$ hat mindestems $|A| + |C| - 1$ Kanten, da dieser zusammenhängend ist.Somit folgt

- $m \geq |E(w,A)| + |E(w,B)| + |E(x,B)| + |E(x,C)| + |E(A \cup B \cup C)|$
  $\geq |A| + |B| + |B| + |C| + (|A| + |C| - 1)$
  $= 2(|A| + |B| + |C|) - 1$
  $= 2n - 5$

- ***Fall 2 :*** $\delta = 3$
  - Sei Knoten $v \in V$ adjazent zu w,x und y
  - da G Durchmesser zwei hat
    * ist jeder Konten aus $V \backslash \{w, x, y\}$ adjazent zu mindestens einen von den Knoten $\{w, x, y\}$ damit wir den Durchmesser zwei beibehalten



(a) Abb.8

  - an der Zeichnung können wir abzählen, dass 3 Kanten von $\{w, x, y\}$ zu v gehen und mindestens eine Kante zu einen der restlichen $n - 4$ Knoten in $S = V \backslash \{w, x, y\}$ führt, die von $\{w, x, y\}$ ausgeht
  - d.h. der Grad d von $\{w, x, y\}$ beträgt:

    $d(w) + d(x) + d(y)$
    $\geq n - 4 + 3$
    $= n - 1$

  - mit Verwendung des Handschlagslemmas folgt nun:

    $\Rightarrow m = \frac{1}{2}\left[d(v) + d(w) + d(x) + d(y) + \sum_{u \in S} d(u)\right]$
    $\geq \frac{1}{2}[3 + n - 1 + 3(n - 4)]$
    $= 2n - 5$

5 Theorem III

In diesem Theorem geht es um die Gemeinsamkeit der MTF- Graphen.

Sei $n \geq 5$ wobei die Kanten ganzzahlig und nicht-negativ sind. Dann ex. ein (n, m) MTF- Graph $\Leftrightarrow$

- $2n - 5 \leq m \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$ oder
- $m = k(n-k)$

<u>**Beweis**:</u>
" $\Rightarrow$ "

- Sei G ein MTF- Graph
- Nehmen wir an, der Graph sei bipartit und ein MTF. Der Graph muss dann vollständig bipartit sein, weil man sonst eine Kante hinzufügen könnte, ohne ein Dreieck zu bilden. Was wiederum kein MTF-Graph wäre.
- d.h. $K_2[k, n-k]$ hat n Knoten und $k(n-k)$ Kanten.
- *Ann.:* G ist ein nicht-bipartiter MTF-Graph.
- d.h. G ist dreiecksfrei und nicht bipartit.
  - $\Rightarrow G$ hat min. einen ungeraden Kreis C der Länge $k \geq 5$
- damit wir kein Dreieck bilden, kann jeder Knoten in $V \backslash C$ maximal zu $(k-1)/2$ Knoten aus dem Kreis adjazent sein.
- da der Graph dreiecksfrei ist, folgt aus Turans[2] Theorem, dass maximal $\lfloor (n-k)^2/4 \rfloor$ Kanten in einem induzierten Teilgraph $V \backslash C$ existieren. Daraus ergibt sich:
  - $$\begin{aligned} m &= |E(C)| + |E(V-C, C)| + |E(V \backslash C| \\ &\leq k + (n-k)(k-1)/2 + \lfloor (n-k)^2/4 \rfloor \\ &= k + (nk - n - k^2 + k)/2 + (n^2 - 2nk + k^2)/4 \\ &= (4k + 2nk - 2n - 2k^2 + 2k + n^2 - 2nk + k^2)/4 \\ &= (n^2 + 6k - 2n - k^2)/4 \\ &= (n^2 + 6k - 2n - k^2 + 1 - 1 + 9 - 9)/4 \\ &= (n^2 - 2n + 1 - k^2 + 6k - 9 - 1 + 9)/4 \\ &= ((n-1)^2 - (k^2 - 6k + 9) + 8)/4 \end{aligned}$$

[2]Das Theorem von Turans besagt, dass, wenn man einen dreiecksfreien Graphen hat, die Kantenanzahl m kleiner gleich $n^2/4$ beträgt.

$= \lfloor (n-1)^2 - (k-3)^2/4 \rfloor + 2$
$= \lfloor (n-1)^2 - (5-3)^2 \rfloor/4 \rfloor + 2$
$= \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor - 4/4 + 2$
$= \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$

- aus Theorem 1 und 2 folgt dann, dass $m \geq 2n-5$
- $2n-5 \leq m \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$

" $\Leftarrow$ "

- Die Behauptung und zu zeigen ist hierbei,dass egal welches m und n vorgegeben wird, man einen MTF- Graphen mit n Knoten und m Kanten findet, wenn sich m in der vorgegenen Schranke $2n-5 \leq m \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$ oder $m = k(n-k)$ bewegt.
- dazu genügt es, für beide Fälle einen (n, m)- MTF Graphen passend zu konstruieren.
- **Fall 1:** Wenn $m = k(n-k)$ist, folgt ohne weitere Erläuterungen, dass man für das vorgegebene m und n, ein k findet, welches letzendlich einen vollständig bipartiten Graphen $K_2[k, n-k]$ uns liefert.
- $\Rightarrow K2[k, n-k]$ hat n Knoten und m Kanten für $m = k(n-k)$
- **Fall 2**: Wenn $2n-5 \leq m \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$ gilt, können wir einen MTF- Graphen folgender Art konstruieren:
  - hier gehen wir davon aus, dass wir m nicht wie oben schreiben können.
  - aber wir können einen Kreis $C_5[1, 2, r, s, t]$ konstruieren, welches uns einen MTF- Graphen liefert. Dieser Kreis erfüllt folgende Eigenschaft:
    - C_5 ist vollständig bipartit
    - daraus folgt, dass der Kreis C_5 dreiecksfrei und maximal ist, da bei Hinzunahme einer beliebigen Kante ein Kreis der Länge 3 entstehen würde.
    - außerdem besteht dieser Kreis aus
      - $a)1 + 2 + r + s + t = n$ vielen Knoten und
      - $b)1 * 2 + 2r + rs + st + t * 1 = m$ vielen Kanten
  - nun wollen wir zeigen, dass genau dieser obige C_5- Kreis den MTF- Graphen liefert
  - da wir m und n vorgegeben haben, ist es unser Ziel r, s und t zu bestimmen. Dazu formen wir die Gleichungen (a) und (b) folgendermaßen um:

  - $a)r + s + t = n - 3$
  - $b)2r + rs + st + t = m - 2$
- aus $b) - 2a)$ folgt :
  - $2r + rs + st + t - 2r - 2s - 2t = m - 2 - 2n + 6$
    $rs - 2s + st - t = m - 2n + 4$
- da m und n vorgegeben sind, ist uns die rechte Seite schon bekannt.
- d.h. jetzt also, dass wir r, s und t so bestimmen müssen, sodass auf der rechten Seite der richtige Wert herraus kommt.
- dazu definieren wir uns die Funktion $f(x) = x(n - x - 5)$
- weiterhin sei s die kleinste positive Zahl, für die gilt:
  $f(s) \geq m - 2n + 5$
- der Grund dafür, dass man immer so ein s findet liegt daran, dass bei $f(s) = s(n - s - 5) \geq m - 2n + 5$ die rechte Seite durch $f(\lfloor (n-5) \backslash 2 \rfloor)$ beschränkt ist und $(n - 5)\backslash 2$ wegen der Annahme, dass $n \geq 5$ nicht negativ sein kann.
  - $2n - 5 \leq m \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$
    $m - 2n + 5 \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + 1 - 2n + 5$
    $= \frac{n^2-2n+1-8n+24}{4}$
    $= \frac{n^2-10n+25}{4}$
    $= \frac{(n-5)^2}{4}$
    $\leq f(\left\lfloor \frac{(n-5)^2}{4} \right\rfloor)$
- für den Fall $m = 2n - 5$ soll $f(s) \geq 0$ gelten ,
  also $s(n - s - 5) \geq 0$
- deswegen wähle $s = 1$, weil s die kleinste positive Zahl sein soll
  d.h., für $n \geq 6$ wird die Ungleichung erfüllt.
- denn wenn $n = 5$ sein würde, könnte man einfach einen 5er-Kreis nehmen, der dann bei 5 Knoten und 5 Kanten $m = 2n - 5$ erfüllt.
- weiter gilt, dass $m - 2n - 5 \geq f(s - 1)$ ist, denn sonst könnte man $(s - 1)$ als kleinsten Wert s wählen, was wiederum ein Widerspruch zur Annahme wäre, dass s der kleinste Wert ist.
- definiere $t = f(s) - m + 2n - 4$ und
  $r = n - 3 - s - t$
- jetzt zeigen wir, dass t und r mindestens eins und niemals mehr als n sein werden.

- dass r und t nicht größer als n sind, können wir folgendermaßen zeigen, weil wir unser C_5 so gewählt haben, dass $1+2+r+s+t=n$ gilt.
    * $1+2+r+s+t$
      $=1+2+(n-3-s-t)+s+t$
      $=1+2+n-3-s-t+s+t$
      $=n$
- wir wissen schon dass $s \geq 1$ ist und $t = f(s) - 2n - 4$ ist. Dann bekommt man mittels einsetzten, dass
  $t \geq m - 2n + 5 - 2n - 4 = 1$ gilt. Also $t \geq 1$
  wir können aber auch schreiben, dass
  $t = m - 2n + 5 + m - 2n - 4$
  $= m - 2n + 5 + 1 - (m - 2n + 5)$
  $\leq f(s) + -f(s-1)$
  $= s(n-s-5) + 1 - [(s-1)(n-(s-1)-5)]$
  $= sn - s^2 - 5s + 1 - (sn - s^2 + s - 5s - n + s - 1 + 5)$
  $= sn - s^2 - 5s + 1 - sn + s^2 - s + 5s + n - s + 1 - 5)$
  $= n - 3 - 2s$
- nun bleibt noch zu zeigen, dass r auch größer gleich 1 sein muss, damit wir unseren MTF- Graphen bekommen.
- es gilt $r = n - 3 - s - t$
  $\geq n - 3 - s - (n - 3 - 2s)$
  $= n - 3 - s - n + 3 + 2s$
  $= s$ wobei $s \geq 1$
- nun können wir rechnerisch zeigen, dass unser definierter C_5-Kreis ein (n, m) MTF- Graph liefert.

- *w.w.* $1+2+r+s+t=n$
  $=1+2+(n-3-s-t)+s+t$
  $=1+2+n-3-s-t+s+t$
  $=n$ Knoten

  w.w $2+2r+rs+st+t$
  $=2+(s+2)(n-3-s-t)+st+t$
  $=s(n-s-5)+2n-4-t$
  $=s(n-s-5)+2n-4-s(n-s-5)+m-2n+4$
  $=m$ Kanten

Der $C5[1,2,r,s,t]$ wird nun folgendermaßen konstruiert: Man nimmt einen 5er Kreis und ersetzt je einen Knoten mit 1, den zweiten Knoten mit 2, den dritten mit r, den vierten mit s und den fünften Knoten mit t Knoten. Wenn man sich eine von den fünf Mengen im Kreis anguckt, ist diese Menge jeweils mit der Nachbarmenge vollständig verbunden, sodass diese beiden Mengen einen vollständig bipartiten Graphen bilden. Wenn man jedoch den ganzen Graphen anguckt, ist dieser nicht vollständig bipartit. D.h. jede Menge ist zu ihrer Nachbarmenge vollständig bipartit.Genau so ein Graph erfüllt, wie oben nachgerechnet, die gewünschten Bedingungen.