

Minimum Manhattan Network is NP-Complete

von Francis Y. L. Chin, Zeyu Guo und He Sun aus dem Jahr 2009

Ausarbeitung von Daniel Jordan

14. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Das Problem	2
1.2	Idee und Zielsetzung	2
1.3	Definitionen	2
2	Das Vorgehen	4
2.1	Gadgets	5
2.1.1	Negator Gadget	7
2.1.2	Splitter Gadget	6
2.1.3	Turn Gadget	9
2.1.4	Clause Gadget	10
2.1.5	Adaptor Gadget	11
2.1.6	Dummy Gadget	11
2.2	Gadget-Kombinationen	12
3	Analyse und Ergebnis	13

1 Einführung

1.1 Das Problem

Ein "geradliniger Weg" zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbb{R}^2$ ist ein Weg, welcher p und q mit beliebigen horizontalen und bzw. oder vertikalen Strecken verbindet. Ein "Manhattan Weg" zwischen p und q ist ein geradliniger Weg der Länge $\text{dist}(p, q) := |p.x - q.x| + |p.y - q.y|$.

Sei die Menge T mit n Punkten aus \mathbb{R}^2 gegeben, dann ist ein Netzwerk G ein "Manhattan Netzwerk" über T , sofern für alle $p, q \in T$ ein Manhattan Weg zwischen p und q mit Strecken aus G existiert.

Für die gegebene Menge T fragt das "Minimale Manhattan Netzwerk" (MMN) Problem nach einem Manhattan Netzwerk G über T mit minimaler Länge.

1.2 Idee und Zielsetzung

Mit Hilfe von sogenannten "Gadgets" soll eine polynomielle Reduktion des bekannten 3-SAT Problems auf das zugehörige Entscheidungsproblem durchgeführt werden. Mit dieser Konstruktion kann die NP-Vollständigkeit bewiesen werden. Diese Konstruktion wird nun im Folgenden erläutern.

1.3 Definitionen

Die Kantenmenge eines Manhattan Netzwerks lässt sich in drei Teilmengen unterteilen, d.h. $G := (T, E_F \cup E_S \cup E_C)$. Dabei ist E_F die Menge der Linienelemente, für die $p.x = q.x$ oder $p.y = q.y$ gilt, d.h. es handelt sich hierbei um die Verbindungslinien zwischen zwei Punkten, die entweder die gleiche x - oder y -Koordinate besitzen. E_S besteht aus den Verbindungslinien zweier Punkte, deren x - und y -Koordinate beide unterschiedlich sind. Somit hat man für jede Verbindungslinie in E_S ein vertikales und ein horizontales Liniensegment. Diese Menge bezeichnet man auch als "Menge der Streifenwege". E_C beinhaltet die restlichen Kanten aus G , d.h. $E_C := G \setminus (E_F \cup E_S)$.

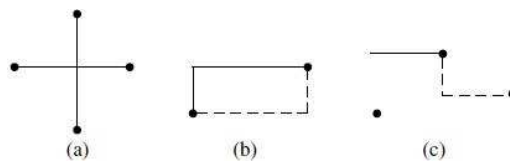


Bild 1: Skizze (a) zeigt ein Beispiel für Kanten aus E_F , (b) eines für E_S und (c) eines für E_C .

Bezeichne mit $R(p, q)$ ein geschlossenes Rechteck, wobei $p, q \in \mathbb{R}^2$ entgegengesetzten Ecken entsprechen.

Sei $B_V(p, q)$ das vertikal durch p und q begrenzte "Band", d.h.

$$\{(x, y) \mid \min\{p.x, q.x\} \leq x \leq \max\{p.x, q.x\}, y \in \mathbb{R}\},$$

des Weiteren sei $B_H(p, q)$ das horizontal durch p und q begrenzte Band, d.h.

$$\{(x, y) \mid \min\{p.y, q.y\} \leq y \leq \max\{p.y, q.y\}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Für $p, q \in T$ mit $p.x < q.x$ und $p.y < q.y$, bezeichne $R(p, q)$ als einen "vertikalen Streifen", sofern kein Punkt aus T in einem Gebiet $B_V(p, q)$ existiert, mit Ausnahme auf den vertikalen Linien $\{(x, y) \mid x = p.x, y \leq p.y\}$ und $\{(x, y) \mid x = q.x, y \geq q.y\}$.

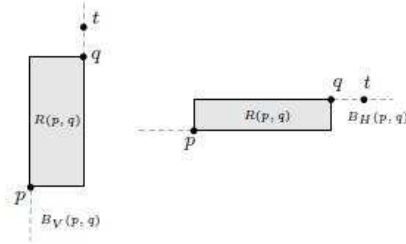


Bild 2: Vertikaler und horizontaler Streifen, wobei jeder Punkt aus T , auf $B_V(p, q)$ bzw. $B_H(p, q)$, nur auf der gestrichelten Linie liegen kann.

Die "Länge eines vertikalen Streifens" $R(p, q)$ sei $|p.y - q.y|$ und die "Breite eines vertikalen Streifens" $R(p, q)$ sei $|p.x - q.x|$. Dies gelte entsprechend für einen horizontalen Streifen.

Für einen beliebigen Streifen $R(p, q)$ bezeichne einen Manhattan Weg bzgl. p und q als "Streifenweg" von $R(p, q)$.

Die Menge der Streifenwege heißt "angenehm", falls für jeden Streifen $R(p, q)$ gilt, dass der Streifenweg, der p und q verbindet, auf dem Rand von $R(p, q)$ liegt.

Unter der Annahme, dass die Menge der Streifenwege angenehm ist, existieren immer genau zwei Möglichkeiten p und q zu verbinden. Dies kann in einer booleschen Formel für eine Variable v mit 0 oder 1 repräsentiert werden.

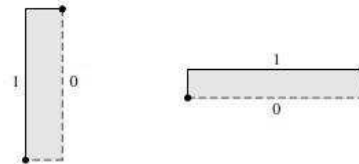


Bild 3: Die beiden Möglichkeiten die Punkte mit Manhattan Wegen zu verbinden werden mit der Variablen v repräsentiert: $v = 1$ für die durchgezogenen und $v = 0$ für die gestrichelten Linien.

In Bezug zu den obigen Definitionen kann man nun davon ausgehen, dass ein Streifenweg nur ein vertikales Liniensegment enthält, dessen x -Koordinate $p.x$ oder $q.x$ entspricht und daher auch nur ein horizontales Liniensegment, das sogenannte "Umschaltsegment", beinhaltet.

2 Das Vorgehen

Die grundlegende Idee der Reduktion auf MMN geht davon aus, dass eine gegebene boolesche Formel Ψ mit n Variablen und m Klauseln so in eine Punktmenge T konvertiert wird, dass Ψ genau dann erfüllbar ist, wenn die Länge des MMN auf T durch einen in Polynomialzeit berechenbaren Wert begrenzt ist.

In der Konstruktion repräsentiert jede Strecke, die einen Streifen darstellt, ein Literal, wobei diese vertikal für einen vertikalen und horizontal für einen horizontalen Streifen verläuft. Jeder Knoten steht für einen Gadget und jede mit gestrichelten Linien umfasste Fläche symbolisiert eine der Klauseln von Ψ . Benachbarte vertikale Linien mit der Nummer $2i - 1, 2i, 1 \leq i \leq n$, repräsentieren die Literale x_i und $\neg x_i$. Diese werden, falls sie in einer Klausel vorkommen, über ein "Splitter Gadget" mit der entsprechenden Klausel verbunden. Jede vertikale Linie hat am oberen Ende ein "Dummy Gadget" und ist am unteren Ende mit einem "Negator Gadget" oder "Turn Gadget" verbunden, um sicherzustellen, dass die Belegung mit 0 oder 1 verändert oder beibehalten werden kann, da x_i und $\neg x_i$ entgegengesetzte Werte annehmen müssen. Das "Clause Gadget" ist mit drei Strecken, die zu drei Literalen korrespondieren, verbunden. Die m Flächen, die zu den Klauseln korrespondieren, bestehen jeweils aus fünf Gadgets und sind auf der rechten Seite des Netzwerks platziert. Hierbei benötigt man das "Negator Gadget" zusammen mit dem "Clause Gadget", um sicherzustellen, dass die Verbindung genau dann die kürzeste Länge erreicht, wenn die Klausel erfüllbar ist. Somit hat das Manhattan Netzwerk genau dann minimale Länge, wenn eine Zuordnung der Variablen existiert, so dass jede Klausel erfüllbar ist. Die in dem Netzwerk vorkommenden Streifen können zwei unterschiedliche Breiten haben: entweder eine Standardbreite von 20 oder eine schmale Breite von 10. Um die Streifen unterschiedlicher Breite zu verbinden, wird ein "Adaptor Gadget" benötigt. Diese Konstruktion wird anhand des folgenden Schaubilds verdeutlicht.

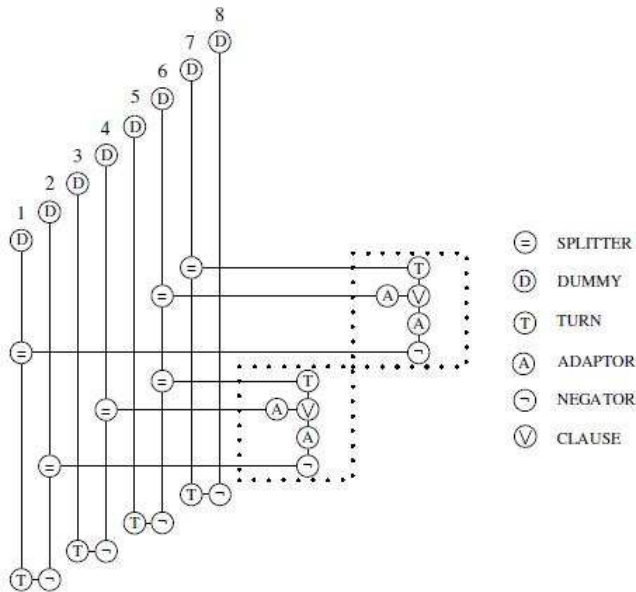


Bild 4: Aus der booleschen Formel $\Psi = (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ resultierender Graph.

2.1 Gadgets

Benötigt werden sechs unterschiedliche Gadgets: Negator, Turn, Splitter, Clause und Dummy, die so platziert werden, dass zwei Gadgets immer von einem horizontalen oder vertikalen Streifen verbunden werden.

In jedem Gadget existieren drei Punktepaare:

- ein Schwarzes, bezeichnet durch b_1 und b_2 , die auf den entgegengesetzten Ecken des Gadgets platziert werden,
- ein Weißes, bezeichnet durch w_1 und w_2
- sowie ein Graues, bezeichnet durch g_1 und g_2 , welche jeweils sehr nahe an den weißen Punkten liegen und unter Umständen auch zusammen zu einem Punkt verschmelzen können.

Für die Positionen der Punkte gelten folgende Ungleichungen:

$$b_1.x < w_1.x < g_1.x \leq g_2.x < w_2.x < b_2.x \text{ und} \\ b_1.y < w_2.y < g_2.y \leq g_1.y < w_1.y < b_2.y$$

Da b_1 immer in der unteren linken Ecke und b_2 immer in der oberen rechten Ecke liegt, bilden b_1 von einem Gadget und b_2 von einem anderen einen Streifen, der die beiden Gadgets verbindet. Dieser ist, abhängig von den relativen Positionen, horizontal oder vertikal. Dabei liegt jede Seite des Streifens mit einem Ende auf dem Rand eines Gadgets und mit dem anderen Ende innerhalb des anderen

Gadgets. Um die Verbindungslängen innerhalb der Gadgets möglichst kurz zu halten, ist es immer vorteilhaft, wenn der Streifenweg innerhalb des Gadgets verläuft. Würde der Streifenweg den Streifen in der Mitte zur anderen Seite kreuzen, so liegt er bei beiden Gadgets auf der äußeren Seite, was bei beiden zu größeren Verbindungslängen der Gadgets führt. Bezeichne nun mit B ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Achsen verlaufen und das alle Gadgets und Streifen beinhaltet. Der Rand δB des Rechtecks verläuft auf den Linien $x = x_1$, $x = x_2$ sowie $y = y_1$ und $y = y_2$, wobei $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ gilt. Sei zu Beginn $T = T_0$ die Menge dieser Eckpunkte:

$$T_0 := \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}.$$

Nun werden für jedes Gadget innerhalb von B acht Punkte auf δB zu T hinzugefügt. Diese haben die folgenden Koordinaten, die sich jeweils dadurch ergeben, dass von b_1 , b_2 , w_1 und w_2 eine Koordinate beibehalten wird und die andere einer Randkoordinate von B entspricht:

$(x_1, b_1.y)$, $(b_1.x, y_1)$, $(x_2, b_2.y)$, $(b_2.x, y_2)$, $(x_1, w_1.y)$, $(w_1.x, y_2)$, $(x_2, w_2.y)$ und $(w_2.x, y_1)$. Verläuft an einer Seite des Gadgets kein Streifen, so wird zusätzlich ein weiterer Punkt so auf δB hinzugefügt, dass er, je nachdem auf welcher Seite kein Streifen ist, mit b_1 oder b_2 auf einer horizontalen bzw. vertikalen Linie liegt. Im folgenden Bild handelt es sich hierbei um den Punkt u . Durch Hinzufügen dieser Punkte liegen die Liniensegmente aus E_F zwingend auf jedem Manhattan Netzwerk. Zudem sollte das Manhattan Netzwerk die Wege zwischen w_1 und g_1 , g_1 und g_2 , w_2 und g_2 , zwischen g_1, g_2 sowie b_1 und außerdem zwischen g_1, g_2 und b_2 beinhalten. Die Positionen von w_1, w_2, g_1 und g_2 sind abhängig von den unterschiedlichen Gadgets, so dass jeweils verschiedene Beziehungen der Zuordnungen der Streifen erzwungen werden, um ein MMN zu erhalten.

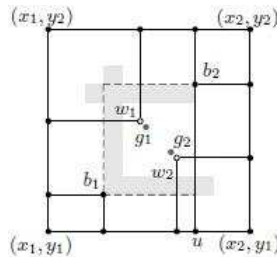


Bild 5: Rechteck B mit den acht hinzugefügten Punkten bei nur einem Gadget.

Da die Länge des Manhattan Netzwerks in jedem Gadget kürzer ist, wenn der Streifenweg auf der inneren Seite verläuft, kann man die Gadgets nicht isoliert betrachten, da ein Streifenweg, wenn er bei einem Gadget innen verläuft, bei dem anderen Gadget außen liegt. Aus diesem Grund werden zunächst sogenannte Potentialkosten eingeführt, welche für jedes Gadget einzeln Strafkosten darstellen, falls ein Streifenweg auf der inneren Seite verläuft. Bei der Berechnung der Länge des gesamten Manhattan Netzwerkes werden diese dann wieder abgezogen.

2.1.1 Negator Gadget

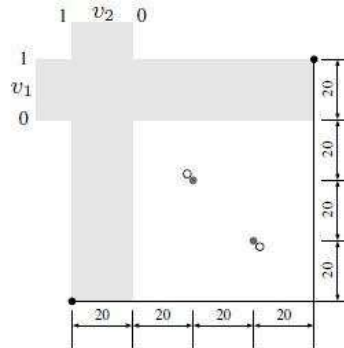


Bild 6: Negator Gadget

Das "Negator Gadget" ist mit zwei Streifen verbunden, für die die Zuordnung der Variablen v_1 und v_2 festgelegt wird. Sei ℓ die kürzeste Länge der Strecken, so dass für jedes Punktepaar außer (w_1, g_1) und (w_2, g_2) ein Manhattan Weg existiert. Diese beiden können wegen der kleinen Distanz $\epsilon \leq \frac{1}{2n_G}$ (n_G wird später noch bestimmt) insgesamt vernachlässigt werden, sofern die Gesamtlänge des MMN innerhalb eines bestimmten Wertebereichs liegt. Für dieses Gadget soll außerdem gelten, dass die grauen Punkte mit der geringsten Länge verbunden sind, wenn $v_1 = \neg v_2$ gilt, womit sichergestellt wird, dass in diesem Fall die Länge des Netzwerks innerhalb eines bestimmten Wertes liegt. Man kann folgende vier Fälle unterscheiden:

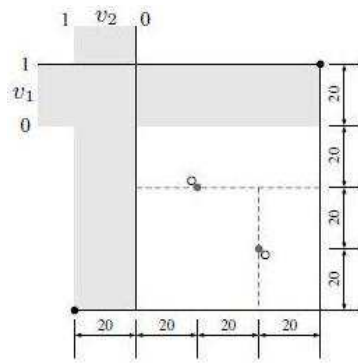


Bild 7: $v_1 = 1; v_2 = 0; \ell = 100$

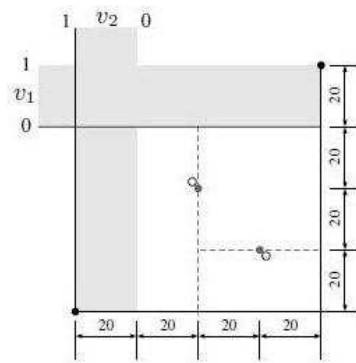


Bild 8: $v_1 = 0; v_2 = 1; \ell = 100$

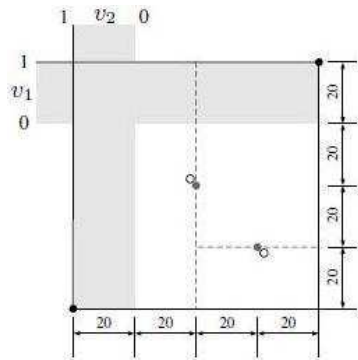


Bild 9: $v_1 = 1; v_2 = 1; \ell = 120$

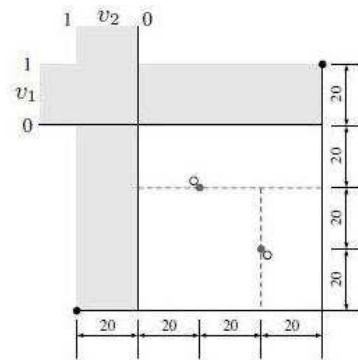


Bild 10: $v_1 = 0; v_2 = 0; \ell = 100$

Die Länge ℓ setzt sich als Summe aus den Längen der beiden gestrichelten Linien zusammen. Die Kostenfunktion ergibt sich wie in der folgenden Tabelle dargestellt, wobei man sehen kann, dass bei Vernachlässigung der Potentialkosten nicht nur der Fall $v_1 = -v_2$ zur minimalen Länge führt, sondern auch $v_1 = v_2 = 0$ den gleichen Wert für ℓ liefert.

v_1	v_2	ℓ	Potential	Kosten
0	0	100	20	120
0	1	100	10	110
1	0	100	10	110
1	1	120	0	120

Tabelle 1: Kostenfunktion für das Negator Gadget

2.1.2 Splitter Gadget

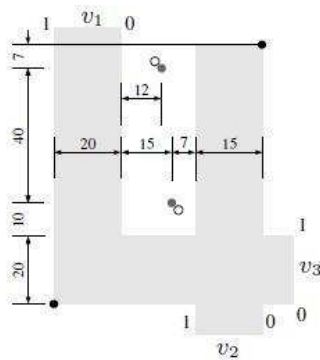


Bild 11: Splitter Gadget

Das "Splitter Gadget" kann eine horizontale Abzweigung vom original vertikalen Streifen erzeugen, so dass dieser die gleiche Zuordnung der Variablen erhält. Dazu werden zwei vertikale und ein horizontaler Streifen wie folgt angeordnet: Minimale Kosten werden erreicht, falls alle drei Streifen die gleichen 0-1 Werte erhalten.

v_1	v_2	v_3	ℓ	Potential	Kosten
0	0	0	77	10	87
0	0	1	72	20	92
0	1	0	69	20	89
0	1	1	67	30	97
1	0	0	107	0	107
1	0	1	87	10	97
1	1	0	87	10	97
1	1	1	67	20	87

Tabelle 2: Kostenfunktion für das Splitter Gadget

2.1.3 Turn Gadget

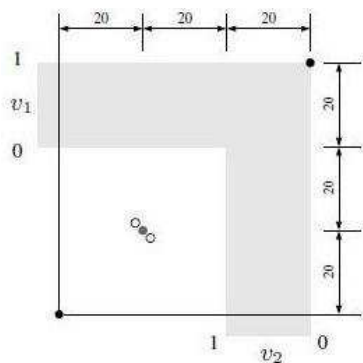


Bild 12: Turn Gadget (Variante a)

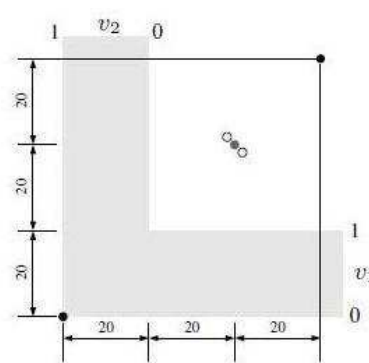


Bild 13: Turn Gadget (Variante b)

Das "Turn Gadget" macht aus einem vertikalen Streifen durch Richtungsänderung einen horizontalen Streifen, dessen Variablenzuordnung mit der des vertikalen übereinstimmt. Minimale Kosten werden daher genau dann erreicht, wenn die beiden Streifen die gleiche Zuordnung haben, wie man auch an folgender Tabelle erkennen kann.

v_1	v_2	ℓ	Potential	Kosten
0	0	40	10	50
0	1	40	20	60
1	0	60	0	60
1	1	40	10	50

Tabelle 3: Kostenfunktion für das Turn Gadget (Variante a). Die Kostentabelle zu Variante b erhält man, indem man die 0-1 Zuordnung von v_1 und v_2 vertauscht.

2.1.4 Clause Gadget

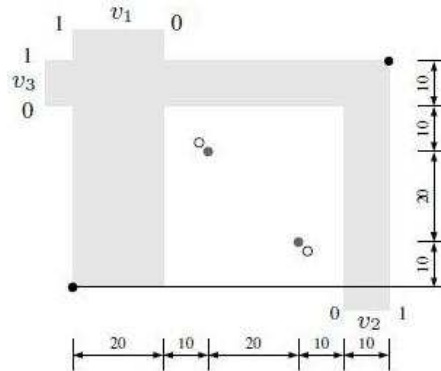


Bild 14: Clause Gadget

Das "Clause Gadget" beinhaltet drei Streifen, welche die mit der jeweiligen Klausel verbundenen Literale repräsentieren. Diese Streifen sind durch andere Gadgets mit den vertikalen Streifen auf der linken Seite, die die einzelnen Literale repräsentieren, verbunden. Die Clause Gadgets sind so konstruiert, dass korrekte Zuordnungen einer Klausel in Ψ gegenüber falschen einen Kostenunterschied aufweisen, d.h. in 7 von 8 Fällen werden, wie aus der Tabelle 4 ersichtlich, optimale Kosten erreicht.

Da einer der drei Streifen (der in Tabelle 4 durch v_2 repräsentierte) durch ein Negator Gadget mit dem linken vertikalen Streifen verbunden ist, können minimale Kosten nur genau dann erreicht werden, wenn die zugehörige Klausel durch die Zuordnung aus der Input-Formel erfüllt werden kann. Um dies zu erreichen, haben zwei der in einem Clause Gadget enthaltenen Streifen eine Breite von 10 und sind somit kleiner als die Standardbreite.

v_1	v_2	v_3	ℓ	Potential	Kosten
0	0	0	70	20	90
0	0	1	80	10	90
0	1	0	70	30	100
0	1	1	70	20	90
1	0	0	80	10	90
1	0	1	90	0	90
1	1	0	70	20	90
1	1	1	80	10	90

Tabelle 4: Kostenfunktion für das Clause Gadget, wobei v_2 den Streifen repräsentiert, der mit dem Negator Gadget verbunden ist.

2.1.5 Adaptor Gadget

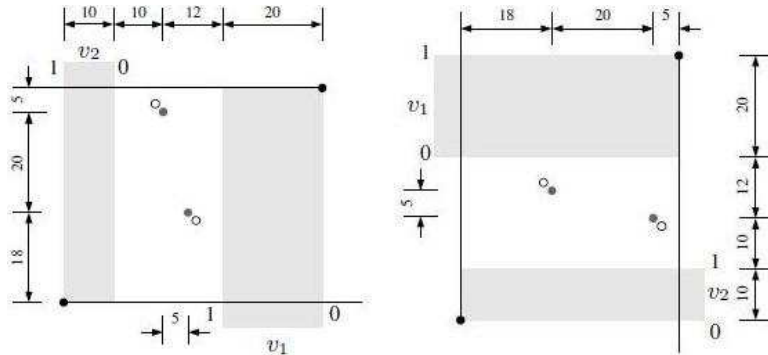


Bild 15: Adaptor Gadget (Variante a) Bild 16: Adaptor Gadget (Variante b)

Das "Adaptor Gadget" dient dazu, zwei Streifen unterschiedlicher Breite zu verbinden, wobei minimale Kosten erreicht werden, wenn die Variablenzuordnungen der beiden Streifen übereinstimmen.

v_1	v_2	ℓ	Potential	Kosten
0	0	55	10	65
0	1	68	0	68
1	0	47	20	67
1	1	55	10	65

Tabelle 5: Kostenfunktion für das Adaptor Gadget (Variante a). Die Kostentabelle zu Variante b erhält man, indem man die 0-1 Zuordnung von v_1 und v_2 vertauscht.

2.1.6 Dummy Gadget

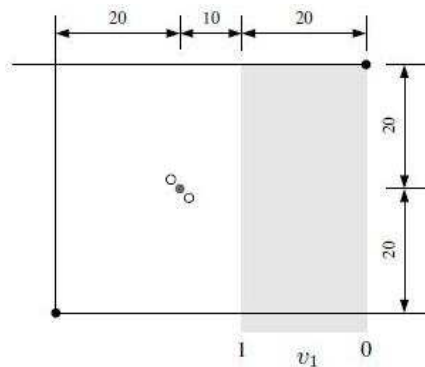


Bild 17: Dummy Gadget

Um die vertikalen Streifen, die mit jedem Literal verbunden sind, zu begrenzen, führt man "Dummy Gadgets" ein. Diese haben in jedem Fall optimale Kosten.

v_1	ℓ	Potential	Kosten
0	40	0	40
1	30	10	40

Tabelle 6: Kostenfunktion für das Dummy Gadget

2.2 Gadget-Kombinationen

Die oben beschriebenen Gadgets können nun so kombiniert werden, dass sie das gewünschte Netzwerk, wie bspw. in Bild 4 abgebildet, bilden. In diesem Beispiel ist das Splitter Gadget mit einem Dummy Gadget über einen vertikalen Streifen verbunden, wie auch mit einem Turn Gadget. Des Weiteren ist es über einen horizontalen Streifen mit einem Negator Gadget verbunden. Diese Konstruktion wird anhand von Bild 18 verdeutlicht. Ähnliche Ansätze werden zur Verbindung anderer Gadgets verwendet und schließlich erhält man die Punktmenge T .

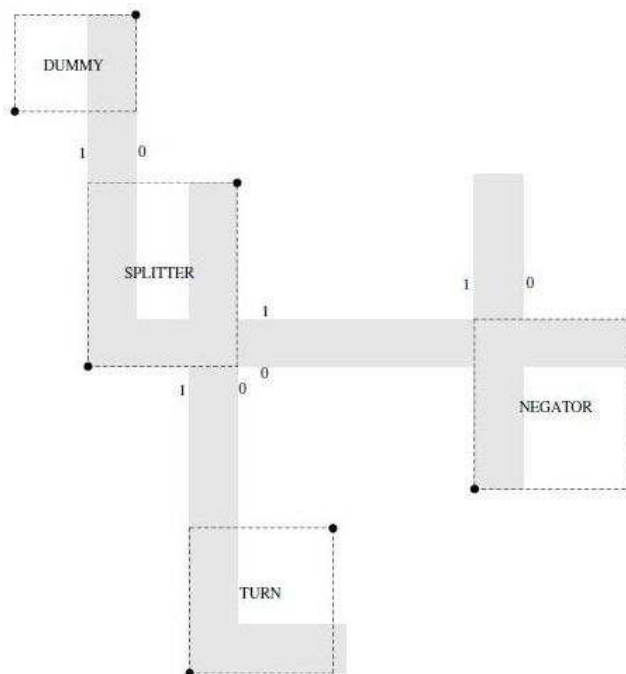


Bild 18: Verdeutlichung des Verbindens verschiedener Gadgets. Zwei adjazente Gadgets teilen sich jeweils einen gemeinsamen Streifen.

3 Analyse und Ergebnis

Chin, Guo und Sun konnten beweisen, dass die boolesche Formel Ψ genau dann erfüllbar ist, wenn für jedes einzelne Gadget die Kosten minimal sind, d.h. die Gesamtkosten für das resultierende Netzwerk sind durch einen in Polynomialzeit berechenbaren Wert begrenzt. Die minimalen Kosten werden in einem Dummy Gadget für jede Zuordnung erreicht. Die Kosten in einem Negator Gadget sind minimal, wenn die beteiligten Streifen unterschiedliche 0-1 Werte repräsentieren bzw. in den Adaptor, Turn und Splitter Gadgets in einem Fall gleicher Werte. In einem Clause Gadget werden bei 7 der 8 Zuordnungen optimale Kosten erreicht.

Für eine boolesche Formel mit n Variablen und m Klauseln sind m Clause Gadgets und folglich $2m$ Adaptor Gadgets nötig, was sich dadurch ergibt, dass für jeden der beiden dünnen Streifen im Clause Gadget ein Adaptor Gadget benötigt wird. Für jede Variable werden zwei Dummy Gadgets benötigt: eines für x_i und eines für $\neg x_i$, wodurch man insgesamt $2n$ Dummy Gadgets erhält. Da x_i und $\neg x_i$ immer durch ein Turn und ein Negator Gadget verbunden sind und diese beiden auch jeweils für jeden Clause einmal im Netzwerk vorkommen, bekommt man jeweils $(n + m)$ Turn sowie Negator Gadgets. Zudem werden für jeden Clause drei Splitter Gadgets, somit also $3m$ im Netzwerk, eingefügt. Insgesamt hat man dann $n_G = (8m + 4n)$ Gadgets. Zählt man für jeden verwendeten Gadget die Streifen zusammen, so wird jeder Streifen zusammen zweimal erfasst, da er zwei Gadgets miteinander verbindet. Für die Anzahl der Streifen gilt also:

$$\begin{aligned} n_s &= \frac{1}{2} \cdot [3m + (2 \cdot 2m) + 2(n + m) + 2(m + n) + (1 \cdot 2n) + (3 \cdot 3m)] \\ &= 10m + 3n. \end{aligned}$$

Summiert man für alle Gadgets die jeweiligen minimalen Kosten, so ergibt sich

$$\sum \text{Kosten}_{\min} = 240n + 641m.$$

Im Folgenden werden nun noch notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, wann das Netzwerk G ein Manhattan Netzwerk auf T ist, wobei es sich nicht zwangsläufig um ein Minimales handeln muss.

Theorem 1. *Ein Netzwerk G ist ein Manhattan Netzwerk auf T genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $E_F \subseteq G$,
2. G enthält eine Menge von Streifenwegen,
3. G enthält ein Manhattan Subnetzwerk auf der Knotenmenge jedes Gadgets.

Die NP-Vollständigkeit von 3-SAT, zusammen mit folgendem Theorem, liefert schließlich den Beweis, dass MMN ebenfalls NP-vollständig ist.

Sei $L(G)$ die Länge des Manhattan Netzwerks G , L_F die Gesamtlänge von E_F und sei L_S die Gesamtlänge aller Streifen, wobei die Länge eines horizontalen bzw. vertikalen Streifens als die Länge der horizontalen bzw. vertikalen Seite definiert ist.

Theorem 2. Ψ ist genau dann erfüllbar, wenn ein Manhattan Netzwerk G auf T mit $L(G) \leq Q$ existiert, wobei:

$$Q := L_F + L_S + \sum \text{Kosten}_{min} - 10n_S + 1.$$

Beweis. „ \Rightarrow “ Da zwischen zwei Punkten, die dieselbe x- bzw. y-Koordinate haben, innerhalb eines Manhattan Netzwerks immer ein horizontales bzw. vertikales Liniensegment existiert, werden im ersten Schritt genau diese in das Netzwerk G eingefügt und erhalten die Menge E_F mit der Gesamtlänge L_F . Im zweiten Schritt wird nun die angenehme Menge von Streifenwegen E_S aus der erfüllenden Belegung π von Ψ konstruiert. Danach kann für jedes Gadget unter Beachtung von π ein MMN konstruiert werden. Unter der Annahme, dass der Abstand zwischen den Punkten w_1 und g_1 sowie w_2 und g_2 jeweils den Wert ϵ hat, reicht eine Distanz von 2ϵ , um diese Punktepaare jeweils in einem Gadget zu verbinden. Zusätzlich müssen die Potentialkosten für jeden Streifen abgezogen werden, da diese selbst die Länge nicht beeinflussen. Diese hatten für jeden Streifen eine Höhe von 10, weshalb insgesamt also $10n_S$ von der Länge $L(E_C)$ subtrahiert werden muss. Daher ergibt sich für die Länge von E_C höchstens

$$L(E_C) = \sum (\text{Kosten}_{min} + 2\epsilon) - 10n_S = \sum \text{Kosten}_{min} + (2\epsilon \cdot n_G) - 10n_S,$$

da $\epsilon \leq \frac{1}{2n_G}$ folgt nun

$$L(E_C) \leq \sum \text{Kosten}_{min} + (2 \cdot n_G \cdot \frac{1}{2n_G}) - 10n_S = \sum \text{Kosten}_{min} - 10n_S + 1.$$

Diese Formel kann, wie man durch Einsetzen des vorher bestimmten Wertes für Kosten_{min} erkennen kann, in polynomieller Zeit berechnet werden.

Nun muss noch gezeigt werden, dass $L(E_F \cup E_S) = L_F + L_S$ gilt.

Dies gilt, falls das Umschaltsegment jedes Streifens in E_F verläuft oder dieses auf einem anderen Streifenweg liegt. Somit muss das generierte Netzwerk daraufhin angepasst werden. Betrachte ohne Einschränkung der Allgemeinheit einen vertikalen Streifen, bei dem das Umschaltsegment auf der Unterseite des Gadgets verläuft, um das Vorgehen zu verdeutlichen. In Bild 19 werden die möglichen vorkommenden Fälle dargestellt.

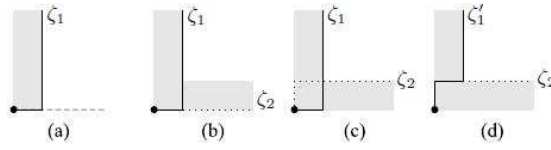


Bild 19: Modifikation der angenehmen Menge der Streifenwege. Durchgezogene Liniensegmente repräsentieren jeweils den Streifenweg ζ_1 oder ζ'_1 , gepunktete den Streifenweg ζ_2 sowie gestrichelte ein Liniensegment in E_F .

In (a) verläuft an der Unterseite des Gadgets kein Streifen und das Umschaltsegment verläuft auf einem Liniensegment aus E_F . Also ist keine Anpassung nötig. In (b) liegt das Umschaltsegment des Streifens ζ_1 auf dem Streifenweg von ζ_2 , weshalb ebenfalls keine Änderung notwendig ist. In (c) liegt das Umschaltsegment von ζ_1 und ζ_2 jedoch weder auf einem Streifenweg noch auf einem Liniensegment aus E_F . Somit muss eine Modifikation des Streifenwegs vorgenommen werden, welche in (d) dargestellt wird. Diese Operationen werden so lange wiederholt bis keine derartigen Streifenwege mehr existieren und dementsprechend $L(E_F \cup E_S) = L_F + L_S$ gilt.

Durch die Konstruktion des Netzwerks sind die Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt, weshalb folgt, dass es sich um ein Manhattan Netzwerk handelt. Außerdem gilt für dessen Gesamtlänge:

$$L(G) \leq L_F + L_S + \sum_{Kosten_{min}} - 10n_S + 1 = Q.$$

„ \Leftarrow “ Zu zeigen ist hierbei, dass für jedes Netzwerk G auf T $L(G) > Q$ gilt, falls Ψ nicht erfüllbar ist. Dies wird per Widerspruch bewiesen. Nehme daher an, es existiere ein Manhattan Netzwerk G mit $L(G) \leq Q$ für die nicht erfüllbare boolesche Formel Ψ . Wegen Theorem 1 gilt, dass G eine Menge von Streifenwegen E_S enthält. Sei nun $E_C = G \setminus (E_F \cup E_S)$.

Nun werden zunächst die Streifenwege aus E_S folgendermaßen modifiziert, um eine angenehme Menge von Streifenwegen zu erhalten:

Liegt das Umschaltsegment in der Mitte eines Streifens, so wird der Streifenweg durch einen anderen ersetzt, wobei zwei Fälle auftreten können. Im ersten Fall verläuft das Umschaltsegment nicht im oberen Gadget und wird durch den Weg ersetzt, der den Wert 0 repräsentiert. Dies wird im linken Teil von Bild 20 dargestellt. Im anderen Fall wird der Streifenweg durch denjenigen ersetzt, der den Wert 1 repräsentiert, was im rechten Teil des Bildes zu erkennen ist.

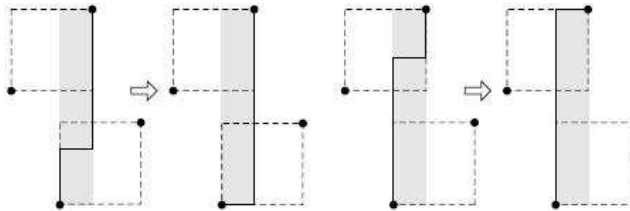


Bild 20: Ersetzungsverfahren um angenehme Streifenwege zu erhalten.

Sei nun π die zugehörige Belegung, dann kann mit der oben beschriebenen Methode das Netzwerk so modifiziert werden, dass jedes Umschaltsegment auf einer Linie aus E_F oder einem anderen Streifenweg liegt. Sei nun E'_S die resultierende Menge von Streifenwegen, dann gilt:

$$L(E_F \cup E'_S) = L_F + L_S.$$

Das aus der Vereinigung der Kanten E_F , E'_S und E_C entstehende Netzwerk G' erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 1 und ist folglich ein Manhattan Netzwerk. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} L(G) &= L(E_F \cup E_S \cup E_C) \\ &= L(E_F \cup E'_S) + L(E_C) \\ &\geq L_F + L_S + L(E_C) \\ &\geq L(G') \end{aligned}$$

Nun muss nur noch $L(G') > Q$ gezeigt werden.

Sei $E'_C = G \setminus (E_F \cup E'_S)$. Da Ψ nicht erfüllbar ist, gilt für mindestens ein Gadget, dass die Kosten bei der Belegung π die minimalen Kosten um mindestens zwei übersteigen, d.h.

$$L(E'_C) \geq \sum \text{Kosten}_{\min} - 10n_S + 2.$$

Daraus ergibt sich schließlich:

$$L(G') = L(E_F \cup E'_S) + L(E'_C) \geq L_F + L_S + \sum \text{Kosten}_{\min} - 10n_S + 2 > Q.$$

$\Rightarrow L(G) \geq L(G') > Q$ und dies ist ein Widerspruch zu obiger Annahme. \square