

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für
einen Graphen mit Durchmesser 5,
um 2-Durchmesser-stabil zu sein

Christian Hettkamp

25. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

2 Definitionen, Voraussetzungen

- 2.1 Voraussetzungen
- 2.2 Definitionen
- 2.3 (l, d) – Graph, l -Durchmesser-stabiler Graph
- 2.4 Lemma A
- 2.5 Theorem A
- 2.6 Definition von Sägen
- 2.7 Theorem B

3 Haupttheorem

- 3.1 Theorem
- 3.2 Beweis

4 Bemerkungen

- 4.1 alternatives Haupttheorem
- 4.2 Anmerkungen

5 Quellenangaben

1 Einführung

Die zentrale Frage ist,

wann ein Graph mit Durchmesser 5 2-Durchmesser-stabil ist.

D.h.: Für welche Graphen G hat jeder Graph $G' = G - e$,

der aus G durch Entfernen einer Kante entsteht,

immer noch Durchmesser ≤ 5 ?

Im Haupttheorem wird gezeigt, dass sich diese Frage mit Hilfe von 4 verschiedenen Voraussetzungen an den Graphen beantworten lässt. Benötigt wird dafür unter anderem der Begriff der Säge.

2 Definitionen, Voraussetzungen

2.1 Voraussetzungen

Im folgenden seien alle Graphen einfach.

D.h. zwischen je zwei Knoten gibt es maximal eine Kante.

2.2 Definitionen

Notation 2.2.1. :

$G = (V, E)$ Graph

$V(G) =$ Knoten von G , $E(G) =$ Kanten von G

Definition 2.2.2. :

Distanz:

$x, y \in V(G) : d_G(x, y)$

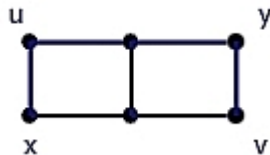
Durchmesser:

$d(G) :=$ längster kürzester Weg zwischen je 2 Knoten in G .

diametralisches Paar:

$x, y \in V(G) : d_G(x, y) = d(G)$

Beispiel 2.2.3. :



$d(G) = 3$ offensichtlich, außerdem ist sowohl (u, v) , als auch (x, y) ein diametralisches Paar, denn es gilt: $d_G(x, y) = 3 = d(G)$ und $d_G(u, v) = 3 = d(G)$

2.3 (l, d) -Graph, 1-Durchmesser-stabiler Graph

Definition 2.3.1. : (l, d) -Graph: (bzgl. der Kanten)

$\forall E \subset E(G)$ mit $|E| \leq l - 1 : d(G - E) \leq d$

Definition 2.3.2. : 1-Durchmesser-stabiler Graph:

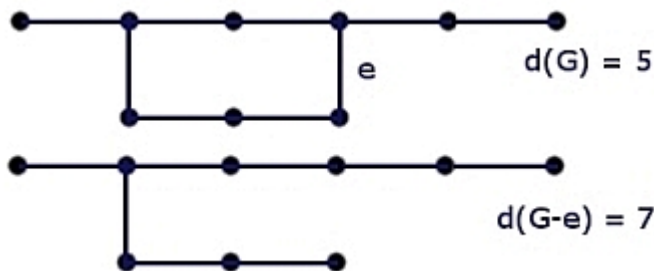
(l, d) -Graph G mit $d(G) = d$

Beispiel 2.3.3. :

Hier ist $d(G) = 5, l = 2, d = 5$

$\Rightarrow (2, 5) - \text{Graph}, d.h. |E| \leq 1 \Rightarrow d(G - E) \leq 5$

Die Aussage ist, dass trotz Wegnehmen einer Kantenmenge E der Größe $|E| \leq 1$, also einer Kante, der Graph $G' := (G - E)$ keinen größeren Durchmesser als G hat. In folgendem Graph ist dies nicht so, der Graph ist also nicht 2-Durchmesser-stabil.



Definition 2.3.4. : Kurzer (x,y) -Weg
 (x,y) - Weg mit Länge $|x,y| \leq d(G)$

2.4 Lemma A

Lemma 2.4.1. : Lemma A

G sei l -Durchmesser-stabil, $d_G(x,y) = d(G)$

$\Rightarrow \exists$ mind. l kantendisjunkte (x,y) - Wege mit Länge $d(G)$

2.5 Theorem A

Theorem 2.5.1. : Theorem A

Graph mit $d(G) \in \{2,3\}$ ist 2 - Durchmesser - stabil \Leftrightarrow

\exists mind. 2 kantendisjunkte kurze (x,y) - Wege zwischen allen $x,y \in G$

2.6 Definition von Sägen

Definition 2.6.1. : (u,v) -Abschnitt

$P(u,v) :=$ ist der (u,v) - Abschnitt eines Weges P

Länge := $|P(u,v)|$

Länge von $P := |P|$

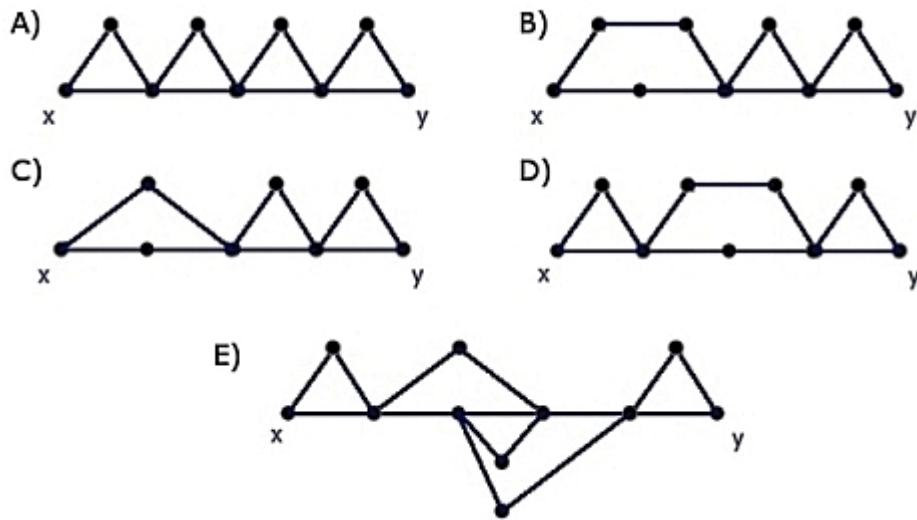
Definition 2.6.2. : Säge

G Graph, $x,y \in V(G), x \neq y, \neg \exists e \in E(G) : e = (x,y)$

Ein Teilgraph $S \subset G$ mit $x, y \in V(S)$ heisst Säge von x nach y , wenn S die Vereinigung von zwei kantendisjunkten (x,y) -Wegen P_1 und P_2 ist, mit:

- (1) $|P_1| = d_G(x, y) \geq 2$
- (2) Es gibt einen internen Knoten von P_1 in P_2

Beispiel 2.6.3. :



Notation 2.6.4. :

In einer Säge S von x nach y sei

$$P_1 = u_0 u_1 \dots u_{d_G(x,y)}; P_2 = v_0 v_1 \dots v_{t-1} v_t; x = u_0 = v_0, y = u_{d_G(x,y)} = v_t$$

Sei $I := \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ die Menge aller gemeinsamen Knoten von P_1 und P_2 so, dass

$$v_{i_k} = v_j \in V(P_2), j \in \{0, 1, \dots, t\}; 0 \leq k \leq m, i_{k+1} > i_k,$$

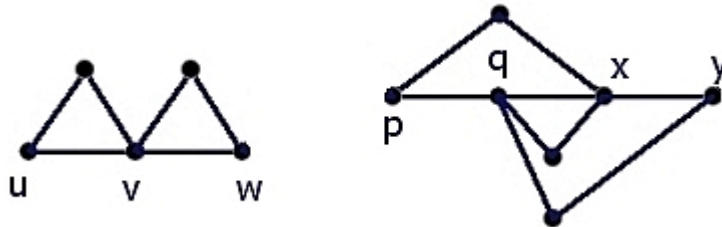
wobei $0 \leq k \leq m - 1$ und $v_{i_0} = v_0$ und $v_{i_m} = v_t$

Definition 2.6.5. : benachbart

$v_i, v_j \in I$ heißen benachbart auf P_2 , wenn:

$$\exists k : (v_i = v_{i_k} \wedge v_j = v_{i_{k+1}}) \vee (v_j = v_{i_k} \wedge v_i = v_{i_{k+1}})$$

Beispiel 2.6.6. :



Offensichtlich ist u benachbart zu v und v benachbart zu w .

Aber im zweiten Graphen ist p nicht benachbart zu x , denn q liegt dazwischen, also ist $p = v_{i_k}$ und $x = v_{i_{k+2}}$

q ist benachbart zu x , denn $x = v_{i_r}$ und $q = v_{i_{r+1}}$.

Bemerkung 2.6.7. :

Sind $u = v_{i_k}, v = v_{i_{k+1}}$ gemeinsame Knoten auf P_1 und P_2 und ausserdem benachbart auf P_2 , so gilt: $|P_1(u, v)| \leq |P_2(u, v)|$

Definition 2.6.8. : Sägezahn, Differenz, abstandsvergroernde Zahl

Sei $S = P_1 \cup P_2$ eine Säge von x nach y ,

u, v gemeinsame Knoten auf P_1 und P_2 und ausserdem benachbart auf P_2 ,

dann heiſst der Teilgraph $P_1(u, v) \cup P_2(u, v)$ ein Sägezahn

und $|P_2(u, v)| - |P_1(u, v)|$ die Differenz des Sägezahns.

Die abstandsvergroernde Zahl ist definiert als:

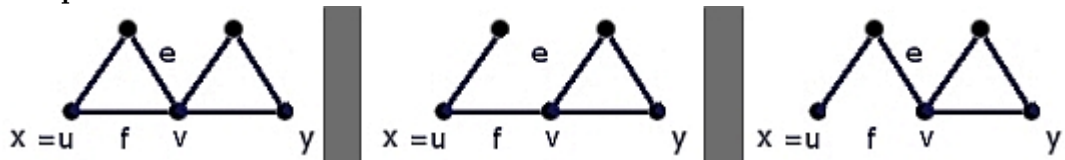
$$I_{a_s}(x, y) := \max_{u, v \text{ gemeinsame Knoten, benachbart auf } P_2} \{|P_2(u, v)| - |P_1(u, v)|\}$$

Bemerkung 2.6.9. :

Nach dem Entfernen einer Kante e aus einer Säge S von x nach y in G gilt:

$$d_{G-e}(x, y) \leq d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y)$$

Beispiel 2.6.10. :



Der Graph enthält 2 Sägezähne.

$$P_2(u, v) = 2, P_1(u, v) = 1 \Rightarrow \text{Differenz ist } 1$$

Weil beide Zähne Differenz 1 haben, ist $I_{a_s} = 1$

Wenn man die Kante e entfernt,

$$\text{gilt immer noch } d_{G-e}(x, y) = 2 \leq d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y) = 2 + 1 = 3$$

Wenn man die Kante f entfernt,

$$\text{gilt } d_{G-f}(x, y) = 3 \leq d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y) = 2 + 1 = 3$$

Definition 2.6.11. : Echte Säge

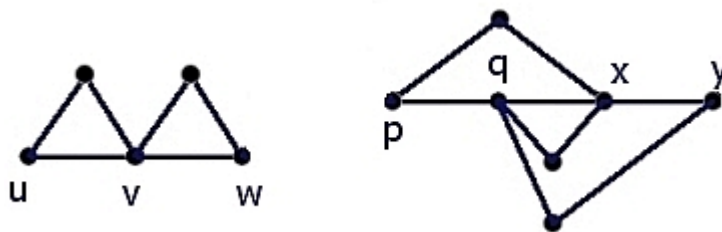
Sei S eine Säge von x nach y , $d_G(x, y) \geq 3$,

$$P_1 = u_0 u_1 \dots u_{d_G(x,y)} \text{ und } P_2 = v_0 v_1 \dots v_{t-1} v_t,$$

S heisst echte Säge, wenn für alle gemeinsamen Knoten von P_1 und P_2 gilt:

$$u = u_{i_1} = v_{j_1} \text{ und } u = u_{i_2} = v_{j_2}, i_1 < i_2 \Leftrightarrow j_1 < j_2$$

Beispiel 2.6.12. :



Die erste Säge ist echt, denn:

$$u = u_0 = v_0, v = u_1 = v_2 \text{ und } 0 < 1, 0 < 2$$

$$v = u_1 = v_2, w = u_2 = v_4 \text{ und } 1 < 2, 2 < 4$$

Die zweite Säge ist nicht echt, denn:

$$p = u_0 = v_0, q = u_1 = v_4 \text{ und } 0 < 1, 0 < 4 \text{ OK}$$

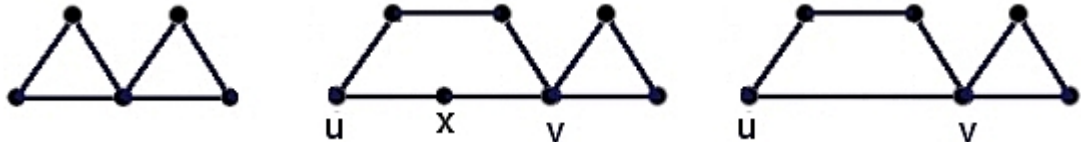
$$q = u_1 = v_4, x = u_2 = v_2 \text{ und } 1 < 2, 4 > 2 \text{ F}$$

$$x = u_2 = v_2, y = u_3 = v_6 \text{ und } 2 < 3, 2 < 6 \text{ OK}$$

Definition 2.6.13. : perfekte Säge

Eine echte Säge heisst perfekt, wenn jeder Knoten von P_1 ein gemeinsamer Knoten von P_1 und P_2 ist und die Differenz jedes Sägezahns 1 ist.

Beispiel 2.6.14. :



Die erste Säge ist offensichtlich perfekt, denn sie ist echt und jeder Zahn hat Differenz 1.

Die zweite Säge ist auch echt, aber nicht perfekt, denn: x ist nicht Knoten von P_2 , aber von P_1 . (Die Differenz ist allerdings 1)

Die dritte Säge ist auch echt, aber nicht perfekt, denn:

$$|P_2(u, v)| - |P_1(u, v)| = 3 - 1 = 2 \neq 1.$$

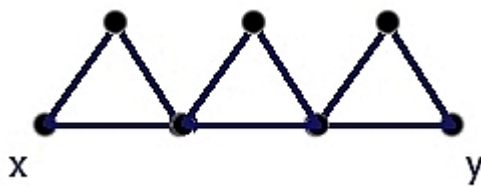
2.7 Theorem B

Theorem 2.7.1. : Theorem B

Sei G ein Graph mit $d(G) = 4$.

Dann ist G genau dann 2-Durchmesser-stabil, wenn für alle Paare $x, y \in V$, $x \neq y$, eine der folgenden zwei Bedingungen gilt:

- (1) Es gibt 2 kantendisjunkte kurze (x, y) -Wege in G
- (2) Es gibt eine perfekte Säge von x nach y in G mit Länge 3:



3 Haupttheorem

3.1 Theorem

Theorem 3.1.1. :

Voraussetzung.: $d(G) = 5$.

Dann gilt:

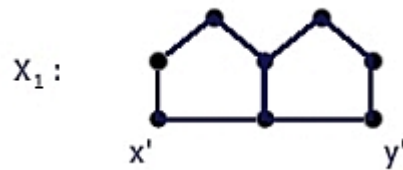
G ist 2-Durchmesser-stabil \Leftrightarrow

$\forall x \neq y \in V(G) \exists k \in \{1, 2, 3, 4\} : (k) \text{ gilt}$

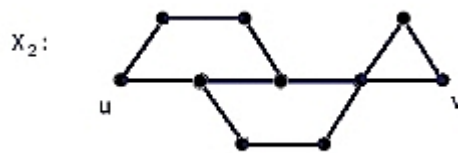
Es gibt 2 kantendisjunkte kurze (x,y) -Wege in G (1)

Es gibt eine echte Säge von x nach y mit $d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y) = 5$ (2)

G enthält einen zu X_1 isomorphen Teilgraph mit $x \cong x', y \cong y'$ (3)



G enthält einen zu X_2 isomorphen Teilgraph mit $x \cong u, y \cong v$ (4)



3.2 Beweis

Beweis. :

Rückrichtung:

Dass (1) bis (4) hinreichende Bedingungen sind, ist klar, denn:

(1): Wenn man in dem einen Weg eine Kante entfernt, hat der andere Weg immer noch Länge ≤ 5 .

(2): Wenn eine Kante e entfernt wird, gilt wegen $d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y) = 5$ immer noch $d_{G'}(x, y) \leq 5$ für $G' = G - e$.

(3): Wie man am Graphen X_1 sehen kann, kann man jede beliebige Kante entfernen und es gibt immer noch einen Weg von x nach y der Länge ≤ 5 hat.

(4): Analog zu (3), sieht man am Graphen X_2 .

Hin-Richtung:

Betrachte für die Hin-Richtung nun 5 Fälle:

Fall 1: $d_G(x, y) = 1$

Es gibt 2 kantendisjunkte kurze Wege, denn ein Weg ist einfach die Kante $e = (x, y)$ und wenn man die Kante entfernt, ist wegen der 2-Durchmesser-Stabilität mindestens ein Weg der Länge ≤ 5 vorhanden, also ein kurzer Weg. \Rightarrow (1)

Fall 2: $d_G(x, y) = 5$

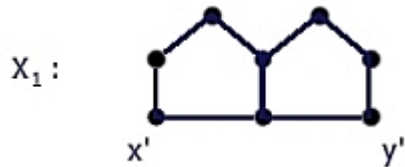
Nach Lemma A gibt es 2 kantendisjunkte kurze Wege. \Rightarrow (1)

Fall 3: $d_G(x, y) = 2$

Es gibt also einen (x, y) -Weg P_0 mit $|P_0| = 2$, der so aussieht:



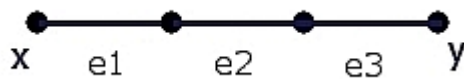
Angenommen (1) gilt nicht,
dann gibt es 2 kurze (x, y) - Wege P_i , ($i = 1, 2$) wobei P_i nicht e_i enthält,
aber gemeinsame Kanten mit jedem P_j , $j = 0, 1, 2$ hat.
Weil (1) nicht gilt, muss $\bigcup_{i=0}^2 P_i$ so aussehen:



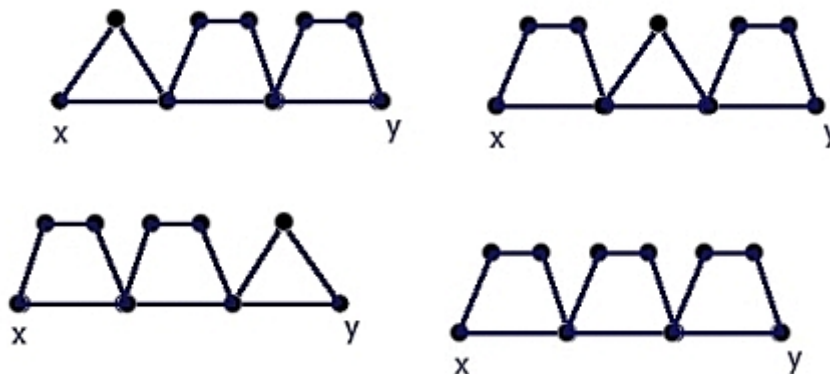
Warum kann $\bigcup_{i=0}^2 P_i$ nur so aussehen ?
Entfernt man die Kante e_i so muss es noch einen Weg der Länge ≤ 5 geben. Also gibt es 2 Wege, die sich mindestens eine Kante teilen, da (1) nicht gelten soll. Ausserdem enthalten beide Wege die jeweils andere Kante, z.B. enthält P_1 e_2 . Daraus folgt die eindeutige Darstellung.
 \Rightarrow (3)

Fall 4: $d_G(x, y) = 3$

Es gibt also einen (x, y) - Weg P_0 mit $|P_0| = 3$, der so aussieht:



Angenommen (1) gilt nicht,
dann gibt es 3 kurze (x, y) - Wege P_i , ($i = 1, 2, 3$) wobei P_i nicht e_i enthält,
aber gemeinsame Kanten mit jedem P_j , $j = 0, 1, 2, 3$ hat.
Wenn man jetzt alle Fälle untersucht, sieht man analog zu Fall 3 mit einigen Überlegungen, dass $\bigcup_{i=0}^3 P_i$ einen der folgenden Graphen als Teilgraph enthält:



\Rightarrow (2)

Fall 5: $d_G(x, y) = 4$

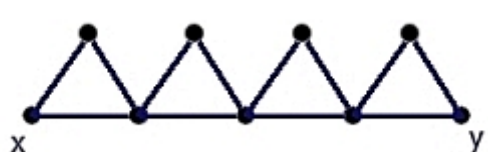
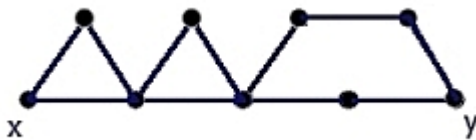
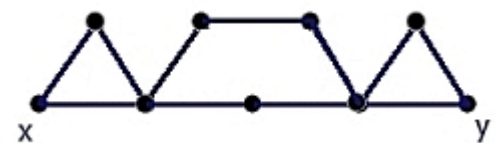
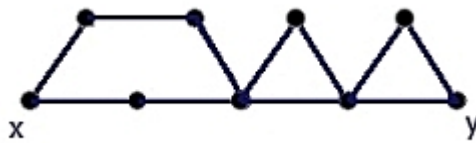
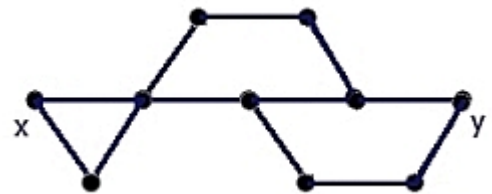
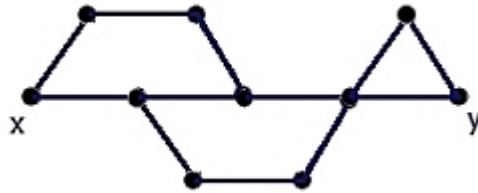
Es gibt also einen (x, y) -Weg P_0 mit $|P_0| = 4$, der so aussieht:



Angenommen (1) gilt nicht,

dann gibt es 4 kurze (x, y) -Wege P_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) wobei P_i nicht e_i enthält, aber gemeinsame Kanten mit jedem P_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$ hat.

Wenn man jetzt alle Fälle untersucht, sieht man analog zu Fall 3 mit einigen Überlegungen, dass $\bigcup_{i=0}^4 P_i$ einen der folgenden Graphen als Teilgraph enthält:



Für die ersten beiden Fälle folgt (4)

Für die übrigen 4 Fälle folgt (2)

Damit sind alle möglichen Fälle betrachtet und der Beweis ist vollständig.

4 Bemerkungen

4.1 alternatives Haupttheorem

Theorem 4.1.1. : andere Fassung des Theorems

Vorr.:

$d(G) = 5$.

G enthält weder X_1 noch X_2 als Teilgraph.

Dann gilt:

G ist 2-Durchmesser-stabil \Leftrightarrow

$\forall x \neq y \in V(G) \exists k \in \{1, 2\} : (i)$ gilt

Es gibt 2 kantendisjunkte kurze (x,y) -Wege in G (5)

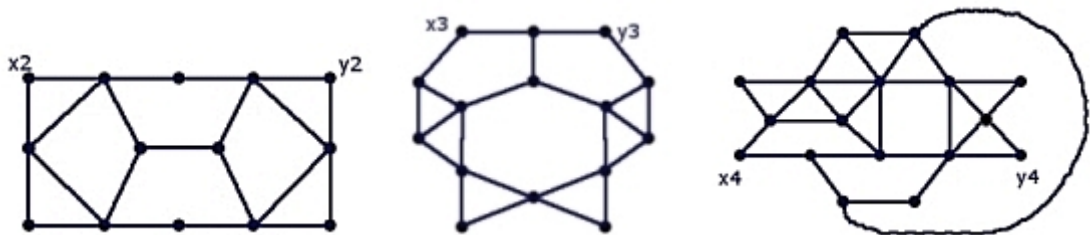
Es gibt eine echte Säge von x nach y mit $d_G(x, y) + I_{a_s}(x, y) = 5$ (6)

4.2 Anmerkungen

Bemerkung 4.2.1. :

Wegen Lemma A kann (1) im Haupttheorem nicht entfernt werden.

Dass (2) bis (4) nicht entfernt werden können zeigen die folgenden Beispiele jeweils für ein (i), dabei gilt in jedem Beispiel jeweils ein (i) aber keins der übrigen $\{(1), (2), (3), (4)\} \setminus \{(i)\}$



Bemerkung 4.2.2. :

Die 3 angegebenen Graphen sind alle planar.

X_1 ist ein Teilgraph von X_2 , aber (4) kann dennoch nicht aus dem Theorem entfernt werden, da das 3. Beispiel in Bemerkung 4.2.1 das verhindert.

5 Quellenangaben

A necessary and sufficient condition for a graph G with diameter 5 to be 2-diameter-stable
(Chengde Xu, Discrete Mathematics 89 (1991) 319-324)