Über Durchmesser-Stabilität von Graphen

basierend auf dem Artikel 'On Diameter Stability of graphs'
von Jeduha Hartman und Izhak Rubin
Los Angeles, Kalifornien
verfasst von Christian Desczyk

1. Februar 2010

1 Einführung

Man stelle sich ein Kommunikationsnetzwerk vor. Dieses kann man mittels eines *Graphen G* modellieren. Dabei entsprechen die *Knoten von G* den Kommunikationszentren, welche die Informationen erhalten und versenden. Die *Kanten von G* entsprechen den Kommunikationsverbindungen zwischen den einzelnen Zentren.
Die Konnektivität des Graphen G steht dabei in Verbindung mit der Verlässlichkeit des Netzwerkes. Nun dient der *Durchmesser (DM) des Graphen G* als Maß für die maximale Nachrichenverzögerung innerhalb des Netzwerkes. Dazu Folgendes:

Definition 1.1 (DM 1. Version)
Sei G ein Graph. Dann nennt man den größt möglichen Abstand zwischen 2 Knoten innerhalb von G den *Durchmesser von G*.

Wir setzen voraus, dass das Netzwerk so konstruiert ist, dass die maximale Nachrichtenverzögerung eine gegebene obere Schranke nicht überschreitet, selbst wenn einige Kommunikationsverbindungen versagen.
Außerdem sind im Folgenden alle Graphen *ungerichtet, schleifenfrei* und besitzen keine $Multikanten$.
Ferner setzen wir nun eine Terminologie fest, auf welche wir uns im weiteren Verlauf beziehen werden, wobei G immer einen Graphen darstellt:

Notation
Sei G ein Graph, dann bezeichnen wir die *Knotenmenge von G* mit $V(G)$ und die *Kantenmenge von G* mit $E(G)$.

Definition 1.2
Sei $v \in V(G)$, dann definiert man als den *Grad von v*

$$deg(v) = |\{w \in V(G) : \text{w ist adjazent zu v}\}|$$

Definition 1.3
Seien $x, y \in V(G)$. Dann entspricht die *Distanz/Abstand zwischen x und y*

$$d_G(x, y) \mathrel{\widehat{=}} \text{Länge eines kürzesten Weges in G, welcher x und y verbindet}$$

Somit ergibt sich für den Durchmesser:

Definition 1.4 (DM 2.Version)
Der *Durchmesser von G* ist

$$d(G) = \max_{x,y \in V(G)} d_G(x, y)$$

Definition 1.5
Ein Knotenpaar $x, y \in V(G)$ für welches gilt

$$d_G(x, y) = d(G)$$

nennt man *diametrales Paar.*

Ein Knotenpaar nicht adjazenter Knoten $x, y \in V(G)$ nennen wir *l-Distanz Paar* (siehe als Beispiel Abb. 1), falls gilt

$$d_G(x,y) = d_{G-E}(x,y) \quad \forall E \subset E(G) \text{ mit } |E| \leq l-1.$$

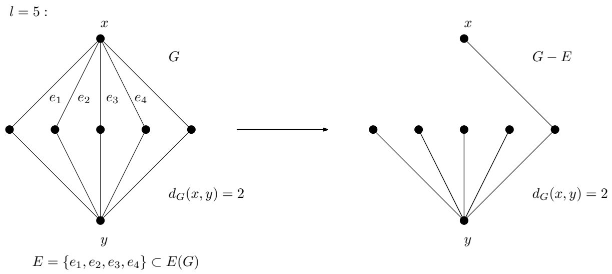

Abbildung 1: 5-Distanz Paar

Definition 1.6
Eine Kante $e \in E(G)$ heißt *zyklisch*, falls es einen Kreis $K \subset E(G)$ in G gibt, sodass $e \in K$.
Wir ordnen jeder zyklischen Kante e eine natürliche Zahl $g(e)$ zu, welche der Länge des kürzesten Kreises entspricht, welcher e enthält.

Definition 1.7
Die *Taillenweite von G* ist definiert als

$$girth(G) = \min_{e \in E(G)} g(e).$$

Definition 1.8
Ein Graph heißt *(l,d)-stabiler Graph* falls

$$d(G-E) \leq d \quad \forall E \subset E(G) \text{ mit } |E| \leq l-1$$

Im Folgenden sagen wir einfach *(l,d)-Graph* statt *(l,d)-stabiler Graph* (siehe als Beispiel Abb. 2).

Definition 1.9
Man nennt einen Graphen *G l-Distanz-stabiler Graph* (siehe als Beispiel Abb. 3), falls mindestens l Kanten entfernt werden müssen um die Distanz zwischen 2 nicht adjazenten Knoten zu erhöhen.

Definition 1.10
Man nennt einen Graphen *G l-DM-stabiler Graph* (siehe als Beispiel Abb. 3), falls G ein (l,d)-Graph mit Durchmesser d ist.

Falls nun ein Graph G l-Distanz-stabil ist, gilt insbesondere für ein diametrales Paar, dass mindestens l Kanten entfernt werden müssen um deren Distanz zueinander und damit den Durchmesser von G zu erhöhen. Dies ist aber genau die Definition eines l-DM-stabilen Graphen. Somit gilt also die Implikation:

$$G \text{ ist l-Distanz-stabil } \Rightarrow G \text{ ist l-DM-stabil.}$$

Wie wir später sehen werden, gilt die Umkehrung im Allgemeinen jedoch nicht.

Beispiele:

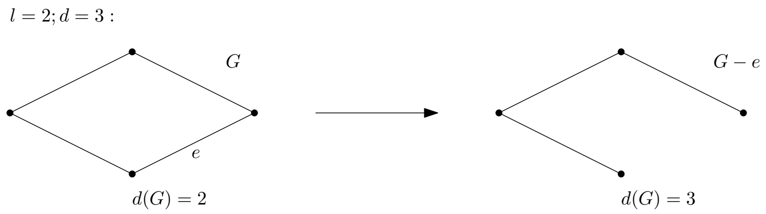

Abbildung 2: (2,3)-Graph

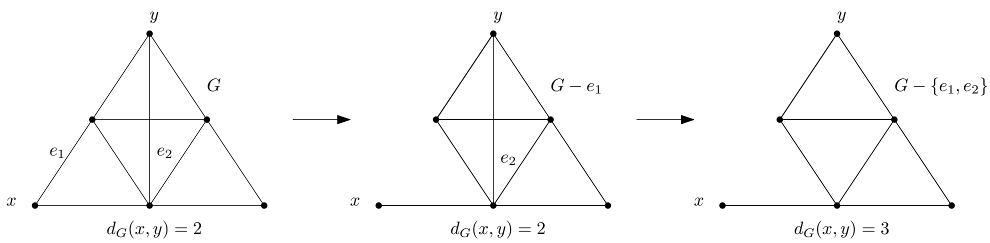

Abbildung 3: 2-Distanz-stabiler/2-DM-stabiler Graph

2 Einige Ergebnisse für *(l,d)-Graphen*

Lemma 1 (ohne Beweis)
Falls es zwischen 2 beliebigen Knoten von G mindestens l kantendisjunkte Pfade nicht länger als d gibt, dann ist G ist ein (l,d)-Graph.

Man sieht recht schnell die Aussage des Lemmas ein, wenn man sich überlegt, dass man ja aus dem in Lemma 1 angegebenen Graphen G eine Kantenmenge $E \subset E(G)$ mit $|E| \leq l-1$ entfernen kann und selbst im 'schlimmsten Fall' damit nur $l-1$ der l kantendisjunkten Pfade beeinflusst und somit stets noch mindestens 1 Pfad existiert, welcher nicht länger als d ist. Wodurch sofort die Aussage des Lemmas folgt.

Lemma 2 (ohne Beweis)
Falls für jedes nicht adjazente Knotenpaar $x, y \in V(G)$ gilt, dass es mindestens l kantendisjunkte x,y-Pfade der Länge $d_G(x,y)$ gibt, so ist G ein l-Distanz-stabiler Graph.

Auch bei Lemma 2 kann man sich durch zu Lemma 1 analoge Überlegungen die Aussage nachvollziehen, jedoch haben hier die l kantendisjunkten Pfade allesamt dieselbe Länge, nämlich $d_G(x,y)$. Dabei ändert dieses Detail nichts an dem Kern der Überlegung.

Wir konstruieren uns nun für beliebige Zahlen $l, d \geq 2$ einen l-DM-stabilen Graphen:

- Seien $H_1, \ldots, H_{d-1}$ insgesamt $d-1$ disjunkte Kopien des kompletten l Knoten Graph K_l und bennene die Knoten von H_j mit $v_1, \ldots, v_l$, für $j \in (1, \ldots, d-1)$
- Verbinde nun v_{i_j} mit $v_{i_{j+1}}$mit einer Kante für $i \in (1, \ldots, l)$
- Füge einen neuen Knoten u_1 adjazent zu allen Knoten von H_1 und einen zweiten Knoten u_2 adjazent zu allen Knoten von H_{d-1} ein
- Nenne den resultierenden Graphen H

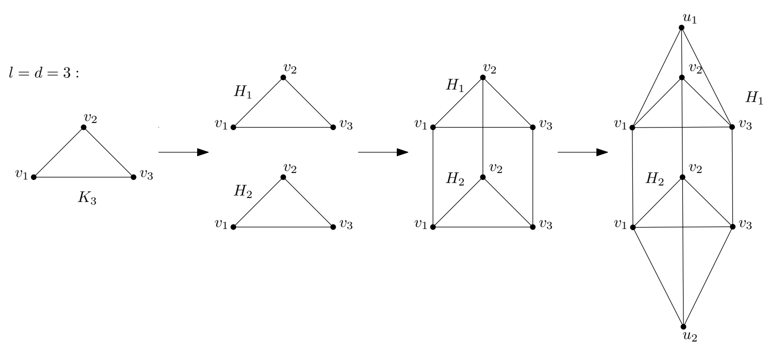

Abbildung 4: Konstruktion eines 3-DM-stabilen Graphen

Nach dieser Konstruktion gibt es nun zwischen jedem beliebigen Knotenpaar mindestens l kantendisjunkte Pfade, deren Länge jeweils nicht länger als d sind. Somit folgt mit Lemma 1, dass H ein $(l, d) - Graph$ ist. Zusätzlich ist $d(G) = d$ und somit folgt mit der Definition, dass H $l - DM - stabil$ ist.

Nun geben wir noch eine Konstruktion für einen l-Distanz-stabilen Graphen an:

- Nehme $d - 1$ Kopien des *Komplementes von* K_l $H_1,\ldots,H_{d-1}$ wobei die Knoten von H_j benannt sind mit $v_{1_j},\ldots,v_{l_j}$ mit $j \in (1, \ldots, d-1)$
- Verbinde nun v_{m_j} mit $v_{n_{j+1}}$, $\forall$ $1 \leq m, n \leq l$ und $j \in (1, \ldots, d-1)$
- Füge neue Knoten u_1 bzw. u_2 adjazent zu allen Knoten von H_1 respektive H_{d-1} ein
- Nenne den resultierenden Graphen H

Auf diese Art und Weise konstruiert gibt es zu jedem nicht adjazenten Knotenpaar in H mindestens l kantendisjunkte Pfade deren Länge der Distanz zwischen diesen beiden Knoten entspricht. Somit folgt mit Lemma 2, dass H ein $l - Distanz - stabiler$ Graph mit Durchmesser d ist.

Theorem 1
Sei G ein l-DM-stabiler Graph ($l \geq 2$) dann gilt:

$$g(e) \leq d(G) + 1, \qquad \forall \ e \in E(G)$$

und dies ist die best mögliche Abschätzng.

Beweis
Wenn G ein l-DM-stabiler Graph ($l \geq 2$) ist, ist G insbesondere 2-Kanten-zusammenhängend [1] und dadurch sind alle Kanten zyklisch. Sei $e = ab \in E(G)$ eine Kante in G und nehme an, dass für diese Kante $g(e) > d(G) + 1$ gilt. Wenn wir nun diese Kante aus G entfernen, würde folgen, dass $d(G) > d(G - e)$ (1), da es ansonsten einen Kreis in G derart geben würde, dass $g(e) \leq d(G) + 1$ was ein Widerspruch zur Annahme wäre. Jedoch führt (1) zu einem Widerspruch zur vorausgesetzten l-DM-Stabilität von G. Somit kann es keine solche Kante e geben.
Um zu zeigen, dass diese Abschätzung auch die best mögliche ist, konstruieren wir für eine beliebige natürliche Zahl $d \geq 2$ einen l-DM-stabilen Graphen, welcher mindestens eine Kante e mit der Eigenschaft $g(e) = d(G) + 1$ enthält:

- Seien G_1 und G_2 zwei verschiedene l-DM-stabile Graphen mit Durchmesser d_1 respektive d_2, wobei $x_i, y_i \in V(G_i)$ für $i = 1, 2$ ein diametrales Paar ist. Dabei haben wir gesehen, dass wir uns aus einem beliebigen l Kanten Graph K_l einen l-DM-stabilen Graphen konstruieren können und somit ist die Existenz von G_1 und G_2 gegeben.

[1] Man nennt einen Graphen G 2-Kanten-zusammenhängend, falls es für jedes beliebige Knotenpaar von verschiedenen Knoten $x, y \in V(G)$ mindestens 2 kantendisjunkte $x, y - Pfade$ in G gibt.

- Generiere einen l-DM-stabilen Graphen G' aus G_1 und G_2, mit Durchmesser $d = d_1 + d_2$ indem man einen Knoten $x_1 \in V(G_1)$ mit einem entsprechendem Knoten $x_2 \in V(G_2)$ identifiziert.

- Wir dürfen aufgrund der l-DM-Stabilität von G_i annehmen, dass es G_i ein Knotentripel $x_i, y_i, z_i \in V(G_i)$ enthält, sodass

$$d_i = d_{G_i}(x_i, y_i) = d_{G_i}(x_i, z_i) = d_{G_i}(y_i, z_i), \quad i = 1, 2$$

- Verbinde y_1 und y_2 mit einer Kante und definiere $G = G' + y_1y_2$

Der resultierende Graph G enthält eine Kante y_1y_2, für welche $g(y_1y_2) = d(G)+1$ gilt (siehe Abb. 5). Ferner ist G l-DM-stabil, da jede Kante, welche man entfernen könnte entweder in G_1 oder G_2 liegt und somit die l-DM-Stabilität von G_1 respektive G_2 zur l-DM-Stabilität von G führt. □

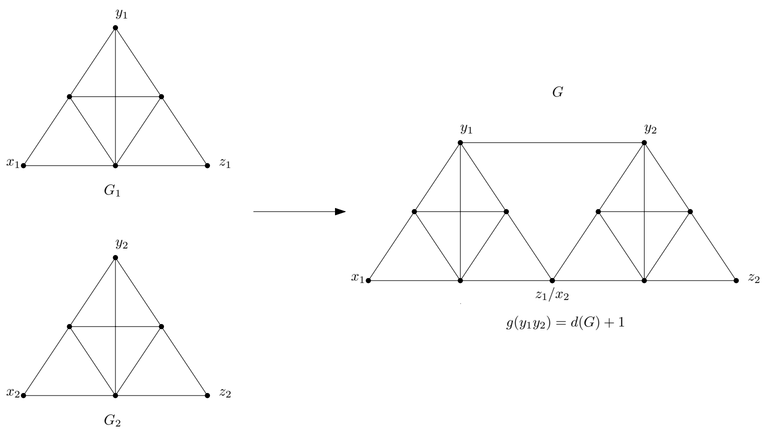

Abbildung 5: Konstruktion von G

Folgerung
$d(G)+1$ ist die kleinste Grenze für die Taillenweite von l-DM-stabilen Graphen.

Theorem 2 (ohne Beweis)
Ein nicht adjazentes Knotenpaar $x, y \in V(G)$ ist genau dann ein l-Distanz Paar, wenn es mindestens l kantendisjunkte $x, y-Pfade$ der Länge $d_G(x, y)$ in G gibt.

Da jedes diametrales Knotenpaar in einem l-DM-stabilen Graph auch ein l-Distanz Paar sein muss, erhält man durch die Anwendung von Theorem 2 eine notwendige Bedingung für l-DM-stabile Graphen:

Theorem 3
Sei G ein l-DM-stabiler Graph und $x, y \in V(G)$ ein diametrales Knotenpaar in G, dann existieren mindestens l kantendisjunkte $x, y - Pfade$ der Länge $d(G)$ in G.

Es sei bemerkt, dass die Aussage von Theorem 3 nicht als hinreichende Bedingung für l-DM-Stabilität genügt. So ist z. B. ein Graph, welcher aus einem Kreis gerader Länge besteht, sicher nicht l-DM-stabil, erfüllt jedoch die Bedingung aus Theorem 3.
Wir schließen aus diesem Abschnitt eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die l-Distanz-Stabilität eines Graphen G:

Theorem 4
G ist genau dann ein l-Distanz-stabiler Graph, wenn es zwischen einem beliebigen nicht adjazenten Knotenpaar $x, y \in V(G)$ mindestens l kantendisjunkte Pfade der Länge $d_G(x, y)$ gibt.

Beweis
Die Rückrichtung ist bei genauer Betrachtung nichts anderes als die Aussage von Lemma 2, welche wir schon an gegebner Stelle nachvollzogen haben. Kommen wir also zur Hinrichtung. Wir haben einen l-Distanz-stabilen Graphen. Nun wissen wir aus der Definition solcher Graphen, dass für jedes nicht adjazente Knotenpaar gilt, dass mindestens l Kanten entfernt werden müssen um deren Distanz zu erhöhen. Also gibt es in einem l-Distanz-stabilen Graphen nur l-Distanz Paare. Somit folgt mit Theorem 2, dass es zu jedem solchen Knotenpaar mindestens l kantendisjunkte $x, y - Pfade$ der Länge $d_G(x, y)$ in G gibt. Wodurch die Hinrichtung und somit die Äquivalenz bewiesen ist. □

3 Einige Klassen von *(2,d)-Graphen*

Das folgende Theorem gibt uns eine hinreichende Bedingung um festzustellen ob ein Graph G ein $(2, d) - Graph$ ist:

Theorem 5
Wenn für eine natürliche Zahl $m \geq 0$ im Graphen G gilt:

- $g(e) \leq 3 + m, \quad \forall \ e \in E(G)$
- *Jedes beliebige Knotenpaar $x, y \in V(G)$ mit $d_G(x, y) \geq d - m$ ist verbunden mit mindestens 2 kantendisjunkten Pfaden, deren Länge d nicht überschreiten.*

dann ist G ein (2,d)-Graph.

Beweis
Der gegebene Graph G erfüllt also beide oben aufgelistete Eigenschaften. Sei nun $x, y \in V(G - e)$ und $e \in E(G)$ beliebig. Betrachte nun folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $d_G(x,y) \geq d-m$, dann folgt direkt aus der zweiten Bedingung $d_{G-e}(x,y) \leq d$.

2. Fall: $d_G(x,y) \leq d-m-1$. So folgt aus der ersten Bedingung $d_{G-e}(x,y) \leq 3+m-1+d-m-2 = d$ (siehe Abb.6). Dabei entspricht $3+m-1$ der Länge des 'Restkreises', welchen man komplett im 'schlimmsten Fall' durchlaufen muss um einen zweiten $x,y-Pfad$ zu finden und ergibt sich wie schon erwähnt aus der ersten Bedingung. Die restlichen Summanden $d-m-2$ ergeben sich aus Fallbetrachtung und der Tatsache, dass nun eine Kante weniger nämlich genau e zur Verfügung steht.

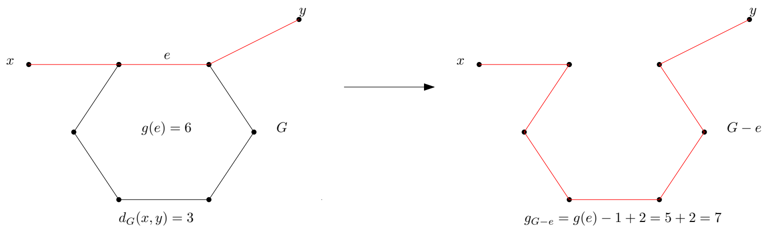

Abbildung 6: Restkreis

Wir haben also gezeigt, dass wir jede beliebige Kante aus dem Graph entfernen können und dass der Durchmesser des dadurch entstandenen Graphen maximal den Wert d annimmt. Dies ist genau die Definition eines $(2,d)-Graphen$. $\square$

Aus Theorem 5 (mit $m=0$) und Theorem 3 folgt:

Theorem 6
Sei G ein Graph, sodass $g(e) = 3 \quad \forall \ e \in E(G)$, dann ist G genau dann ein 2-DM-stabiler Graph, wenn jedes diametrale Knotenpaar in G durch mindestens 2 kantendisjunkte Pfade der Länge $d(G)$ verbunden sind.

Mit Hilfe von Theorem 6 lässt sich zeigen, dass die folgende Klasse von Graphen mit beliebigen Durchmesser, eine Klasse von 2-DM-stabilen Graphen ist. Betrachte folgende Kontruktion:

- Nehme einen Kreis gerader Länge und nummeriere die Knoten mit $v_1, \ldots, v_{2n}$
- Verbinde jedes Knotenpaar $v_i, v_{i+1(mod 2n)}$ mit einem Knoten w_i, sodass w_i adjazent zu v_i und $v_{i+1(mod 2n)}$ ist, wobei $i \in (1, \ldots, 2n)$.
- Nenne den resultierenden Graphen H_{2n}.

Dieser konstruierte Graph H_{2n} hat einen Durchmeser von $n+1$ und ist 2-DM-stabil. So zeigt dieses Beispiel, dass Lemma 1 keine notwendige Bedingung für die Stabilität liefert, falls $l=2$, ausgenommen wenn der Durchmesser kleiner als 4 ist.

Theorem 7
Ein Graph G mit Durchmesser 2 oder 3 ist genau dann 2-DM-stabil, wenn es zwischen jedem Knotenpaar in G mindestens 2 kantendisjunkte Pfade gibt, deren Länge $d(G)$ nicht überschreiten.

Beweis
Bei genauer Betrachtung der Rückrichtung dieser Äquivalenz fällt auf, dass diese genau die Aussage von Lemma 1 ist und somit, wie wir an gegebener Stelle nachvollzogen haben, direkt folgt. Für die Hinrichtung jedoch müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen:

1. Fall: $d(G) = 2$. Dann liefert uns Theorem 1, dass $g(e) \leq 3, \;\; \forall \;\; e \in E(G)$, womit die Aussage für alle adjazenten Knotenpaare bewiesen wäre. Für die diametralen Knotenpaare liefert uns Theorem 3 die gewünschte Aussage.

2. Fall: $d(G) = 3$. Für jedes Knotenpaar $x, y \in V(G)$ mit $d_G(x, y) = 1, 3$ folgt auch hier die Implikation nach analoger Überlegung ebenso durch die Aussagen des ersten Theorems bzw. des dritten Theorems. Den Knotenpaaren mit $d_G(x, y) = 2$ müssen wir noch einige Aufmerksamkeit widmen. Benenne den kürzesten $x, y - Pfad$ mit P_1 ($P_1 = xzy$). Da G nach Vorraussetung ein 2-DM-stabiler Graph ist, existiert ein $x, y - Pfad$ $P_2 \neq P_1$ und $2 \leq |P_2| \leq 3$. Falls $|P_2| = 2$ gilt, sind P_1 und P_2 knotendisjunkt, womit auch hier die Aussage bewiesen wäre. Wenn jedoch alle $x, y - Pfade$ ($\neq P_1$) die Länge 3 haben und keiner von diesen disjunkt zu P_1 ist, nehme einen solchen Pfad $P_3 = xaby$ und nehme oBdA $xa = xz$ an (P_3 ist ja schließlich nicht disjunkt zu P_1). Dann muss es jedoch einen $x, y - Pfad$ P_4 der Länge 3 ($P_4 = xcdy$) derart geben, dass $xc \neq xz$ (siehe Abb. 7), andernfalls würde $d_{G-xc}(x, y) > 3$ gelten, was im direkten Widerspruch zur 2-DM-Stabilität von G steht. In diesem Falle sind also P_3 und P_4 2 kantendisjunkte $x, y - Pfade$ der Länge 3.

□

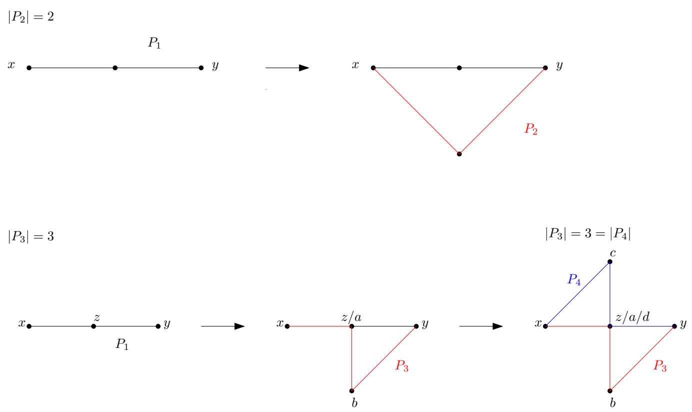

Abbildung 7: Konstruktion von P_2, P_3 und P_4