Prof. Dr. R. Schrader
Birgit Engels [engels@zpr.uni-koeln.de]

SS 2009

Theoretische Informatik

9. Übung

Aktuelle Informationen bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden sich unter :

http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/index.html und
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/uebungen.html

Aufgabe 33 (IP vs. PSPACE - QBF (*)):
Im interaktiven Polynomtest aus der Vorlesung haben wir gesehen, dass eine boolsche Formel (Aussagenlogik) arithmetisiert werden kann und sich der Wertebereich der Variablen bzw. des entstandenen Polynoms entsprechend von $\{0,1\}$ auf $\mathbb{R}$ erweitern lässt bzw. erweitert. Die Arithmetisierung lässt sich wie wir gesehen haben mittels der Funktionen AND_x^p und OR_x^p auf quantifizierte boolsche Formeln (Prädikatenlogik, QBF) erweitern:

Operation	Beispiel-QBF	arithm. Beispiel
AND_x^p	$\forall x p(x)$	$p(0) * p(1)$
OR_x^p	$\exists x p(x)$	$p(0) + p(1)$

Dies führt auf Polynome hohen Grades, welches sich gleichzeitig darin widerspiegelt, dass der Wert der vollständig arithmetisierten quantifizierten boolschen Formel exponentiell in Ihrer Länge sein kann. Sei $a(F)$ der Wert der vollständig arithmetisierten quantifizierten boolschen Formel F über $\{0,1\}$.

a) Zeigen Sie für:
$$F = \forall x_1 \dots \forall x_m \exists y \exists z (y \vee z),$$
dass gilt:
$$a(F) = 4^{2^m}$$

b) Zeigen Sie, dass für alle Formeln F der Länge maximal n gilt:
$$a(F) \leq 2^{2^m}$$

Aufgabe 34 (PCP vs. NEXPTIME (**)):
Die Komplexitätsklasse $NEXPTIME$ ist wie folgt definiert:

> **NEXPTIME** ist die Klasse aller (Entscheidungs-)Probleme, die von einer nichtdeterministischen Turingmaschine in Zeit $O(2^{p(n)})$ entschieden werden können, wobei $p(n)$ ein Polynom in n ist.

Es ist leicht zu sehen, dass gilt $PCP(r(n), q(n)) \subseteq NEXPTIME$. Dies kann allerdings wie folgt verschärft werden. Zeigen Sie:

$$L \in PCP(r(n), q(n)) \Rightarrow \exists\ NDTM,\ die\ L\ in\ 2^{O(r(n)+\log n))}\ Zeit\ entscheidet.$$

Aufgabe 35 (PCP — Nichtapproximierbarkeit (**)):
Zeigen Sie (mittels lückenerhaltender Reduktion von **Max3Sat**), dass die Berechnung einer $(1+\epsilon)$-Approximation für unabhängige Menge **UM** NP-schwer ist.
Hinweis: Beachten Sie die lückenerhaltende Reduktion von **Max3Sat** auf **Clique** sowie die polynomielle Reduktion von **3SAT** auf **UM**.