Prof. Dr. R. Schrader
Birgit Engels [engels@zpr.uni-koeln.de]

SS 2009

Theoretische Informatik

1. Übung

Aktuelle Informationen bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden sich unter :
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/index.html und
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/uebungen.html

Hinweis: Die Anzahl der Sterne pro Aufgabe (1-3) soll eine Orientierung für Schwierigkeitsgrad bzw. Zeitaufwand der Aufgaben darstellen.

Aufgabe 3 (Entscheidbarkeit, (Rekursive) Aufzählbarkeit (**)):

a) Seien L_1 und $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ rekursiv aufzählbar. (Hinweis: Sie können also zwei DTMs M_1 und M_2, die L_1 und L_2 aufzählen als gegeben annehmen.) Sind dann auch

   (a) $L_1 \cup L_2$

   (b) $L_1 \setminus L_2$

   rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort (z.B. über Beschreibung entsprechender DTMs).

b) Aus der Vorlesung ist folgender Satz über eine Sprache L und ihr Komplement $\bar{L}$ bekannt:

$$L \text{ entscheidbar } \Leftrightarrow L, \bar{L} \text{ rekursiv aufzählbar.}$$

   Da es sich um eine Äquivalenzaussage handelt, wurde in der Vorlesung gezeigt:

   - L entscheidbar $\Rightarrow L, \bar{L}$ rekursiv aufzählbar.
   - $L, \bar{L}$ rekursiv aufzählbar $\Rightarrow L$ entscheidbar.

   Im Beweis der 2. Aussage wurden 2 DTMs M_1 und M_2 verwendet, die tatsächlich die Sprachen L und $\bar{L}$ aufzählen, d.h. gestartet mit Eingabe 1 gibt $M_i, i \in \{1,2\}$ das erste Wort der Sprache aus, mit Eingabe 2 das zweite, usw. Für jedes Wort x aus L muss die Maschine, gestartet mit Eingabe 1 irgendwann x ausgeben.

   Stellen Sie sich nun für L und $\bar{L}$ zwei DTMs M_a, M_b vor, die tatsächlich als Eingabe ein Wort x erwarten und nach endlicher Zeit 1 ausgeben, falls x in L bzw. $\bar{L}$ liegt, sonst aber u.U. unendlich lange laufen. Da der Satz gilt, ist L offenbar entscheidbar — wie können Sie aus den DTMs M_a, M_b eine DTM bauen, die L entscheidet?

Aufgabe 4 (Post und Korrespondenz (*)):
In der Vorlesung wurde das 'Post'sche Korrespondenzproblem' (PKP) als Beispiel für ein 'natürliches' Problem eingeführt, das nicht entscheidbar ist:

> Gegeben eine Menge von m (variabel) Paaren $p_i = (x_i, y_i)$ binärer Wörter, existiert eine Folge von Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_n$ aus $1 \leq i \leq m$, so dass die Konkatenation der x_{j_k} und y_{j_k} das gleiche Wort ergeben?

a) Gegeben die Wortpaare $M = \{(1, 01), (101, 10), (10, 110), (10, 1)\}$. Lösen Sie das PKP für M, indem Sie eine Folge von Indizes (wie gesucht) angeben!

b) Ist PKP (rekursiv) aufzählbar? (Begründung!)

Aufgabe 5 (Nichtdeterministische Turingmaschinen (NTM) (*)):
Beschreiben Sie eine NTM, die folgende Sprache akzeptiert:

a) $L_1 = \{w \in \{0,1\} | \exists r, s, 1 \leq r < s \leq t : w = 01^{i_1}01^{i_2} \ldots 01^{i_t}, i_r = i_s\}$

b) $L_2 = \{w \in \{0,1\} | \exists j_k, 1 \leq k \leq t : j_k > 1$ oder
$\forall r, s, t, 0 \leq r < s \leq t : w = 0^{j_1}1^{i_2}0^{j_3}1^{i_4} \ldots 0^{j_t}1^{i_t}, i_r \neq i_s$ und $i_{2n-1} \neq 1\}$

Sind L_1 bzw L_2 rekursiv aufzählbar? Sind Sie entscheidbar ?

Aufgabe 6 (Nichtdeterministische Turingmaschinen (NTM) und Aufzählbarkeit (**)):
Wir definieren:

> Eine nichtdeterministische Turingmaschine M *akzeptiert* eine Sprache L, falls für jedes Wort $w \in L$ *mindestens ein* Berechnungsweg existiert, nach dem M akzeptierend (mit "1") auf der Eingabe w anhält. In allen anderen Fällen (andere Berechnungswege oder $w \notin L$) ist das Verhalten von M nicht spezifiziert.

Zeigen Sie : Eine Sprache $L \subset \Sigma^*$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn eine NTM existiert, die L akzeptiert. (*Hinweis:* Zu zeigen ist eine *Äquivalenzaussage*.)

Aufgabe 7 (Sprachen, Entscheidbarkeit, Rekursive Aufzählbarkeit — Test yourself!):
Definieren Sie die folgenden Grundbegriffe:

- Sprache L
- Komplement $\bar{L}$ einer Sprache L
- Entscheidungsproblem der Sprache L
- Entscheidbarkeit von L
- Rekursive Aufzählbarkeit von L

Aufgabe 8 (Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit — Test yourself!):

a) Was besagt die 'Church'sche These' ?

b) Wie lautet der 'Satz von Rice' und welche Entscheidungsprobleme werden durch ihn verallgemeinert (Definition von H, H_0 und H_1)?