

9. Übung zur Mathematik des Operations Research
Abgabe bis Montag 22. Juni 12:00 Uhr (Kasten im Keller des MI).

Aufgabe 1:

4+2 Punkte

- (a) Beweisen Sie den Satz von Caratheodory:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige nichtleere Menge und $\mathbf{z} \in \text{conv}(S)$. Dann existieren $m \leq n + 1$ Punkte $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m \in S$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{z} \in \text{conv}(\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}).$$

(Hinweis: Führen Sie die Fragestellung auf das Problem zurück, eine zulässige Basislösung eines geeigneten Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$ zu bestimmen.)

- (b) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem tatsächlich $m = n + 1$ viele Punkte aus S für die gewünschte Darstellung von \mathbf{z} benötigt werden.

Aufgabe 2:

2+2+1 Punkte

Sei A eine Matrix mit vollem Zeilenrang m und P das Polyeder der zulässigen Lösungen des linearen Programms

$$\min \mathbf{c}^T \quad \text{s. d.} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

P^d sei die Menge der zulässigen Lösungen des zugehörigen dualen linearen Programms. A_B sei eine Spaltenbasis von A und \mathbf{x} die entsprechende Basislösung mit $\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_N = 0$ auf den übrigen Komponenten. Ferner sei $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_B^T A_B^{-1}$ (wobei \mathbf{c}_B die Einschränkung des Vektors \mathbf{c} auf seine Komponenten in B bedeutet). Zeigen Sie:

- (a) Im Fall $\mathbf{x}_B \geq 0$ ist \mathbf{x} eine Ecke des Polyeders P .
(b) Im Fall $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{y}^T A_N \geq 0$ ist \mathbf{y} eine Ecke des Polyeders P^d .
(c) Es gilt immer die Gleichheit der Zielfunktionswerte: $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Konstruieren Sie zur Lösung $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1, 1]^T$ des Ungleichungssystems

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0$$

eine Basislösung \mathbf{x}^* , so dass mit $\mathbf{c} = [4, 2, 1, 0, 0]^T$ gilt:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Aufgabe 4:

5 Punkte

Sei $P = P(A, \mathbf{b})$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ -5 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

und $\mathbf{c} = [1, -3, 2]^T$ gegeben.

Unter der Annahme, dass die lineare Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ über P beschränkt ist, gebe man sowohl eine endliche obere Schranke sowie eine endliche untere Schranke für die Werte von $f(\mathbf{x})$ über P an.