

1. Übung zur Mathematik des Operations Research
Abgabe bis Montag 20. April 12:00 Uhr (Kasten im Keller des MI).

Aufgabe 1:

2+2+2 Punkte

(a) Zeichnen Sie für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

und $\mathbf{b} = (1, 2, 6, 4)^T$ die Lösung der Ungleichungssysteme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ und $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$.

(b) Zeichnen Sie für $S_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 2)^2 < 2\}$ und $S_2 := \{(0, 0)^T, (0, 1.5)^T, (3, 1)^T, (1, 2)^T, (1, 3)^T\}$ jeweils $\text{conv}(S_i)$ und $\text{cone}(S_i)$.

(c) Zeichnen Sie die Minkowski-Summe $\text{conv}(S_1) + \text{cone}(S_2)$ mit S_1 und S_2 aus Teil (b).

Aufgabe 2:

1+1+1+2+3 Punkte

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Mengen ob diese konvexe Mengen, Lösung von Ungleichungssystemen der Form $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ (i.e. Polyeder) oder keines von beiden sind. Geben Sie dazu jeweils eine Begründung oder einen kurzen Beweis an.

(a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 2\}$

(b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 < 1\}$

(c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1 \text{ und } \mathbf{x} \neq (0, 0)\}$

(d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3\}$

(e) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$

Aufgabe 3:

6 Punkte

Aus Protest gegen die hohen Mensapreise (2EUR für eine Einheit) beschliessen Sie an einem Stand neben der Mensa selbstgekochte Suppe zu verkaufen. Sie verlangen nur den Preis der verwendeten Zutaten. Sie können Ihre Suppe aus folgenden Zutaten in beliebigem Mischverhältnis herstellen:

Name	Kosten	Geschmack	Schärfe
Wasser	0 EUR	0	0
Salz	100 EUR	80	1
Pfeffer	100 EUR	50	200
Tomaten	4 EUR	4	1
Paprika	10 EUR	7	5
Pilze	7 EUR	6	1

Kosten, Geschmack und Schärfe beziehen sich dabei auf eine Einheit, d.h. eine halbe Einheit Pfeffer kostet z.B. 50 EUR. Dabei sei der Gesamtgeschmack und die Gesamtschärfe Ihrer Suppe das gewichtete Mittel aus den Werten der verwendeten Zutaten.

Sie wollen insgesamt 100 Einheiten Suppe herstellen. Die Suppe soll nicht schlechteren Geschmack als das Mensaessen haben — welches einen Geschmack von 1.5 hat — und außerdem möglichst günstig sein, auf jeden Fall aber günstiger als das Mensaessen. Die Schärfe darf 2 nicht übersteigen und 1 nicht untersteigen. Mindestens 1% der Suppe, höchstens aber 3% soll aus Salz bestehen.

Formulieren Sie das Problem als “mathematisches Optimierungsproblem”, d.h. als Optimierungsaufgabe der Form

$$\min f(x_1, \dots, x_n) \text{ unter den Nebenbedingungen } g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) \leq 0$$

mit geeigneten Parametern n und m und geeigneten Funktionen f, g_1, \dots, g_m .

Beschreiben Sie dabei genau:

- (a) Was repräsentieren die von Ihnen gewählten n Unbekannten x_1, \dots, x_n ?
- (b) Was ist Ihre Funktion f ? (Definitionsbereich? Wertebereich?)
- (c) Was sind Ihre Funktionen g_1, \dots, g_m ? (Definitionsbereich? Wertebereich?)