Appendix A: Übungsaufgaben (mit Dr. Thomas Korb)

Aufgabe 1 (mdl.)
Der folgende Kartentrick beruht auf einer Tatsache, welche unter Mathematikern und Zauberern als das *Gilbreath-Prinzip* bekannt ist. (Benannt nach dem Mathematiker und Amateur-Zauberer *Norman Gilbreath*, der es im Jahre 1958 entdeckte. Es handelt sich um ein Beispiel für verborgene Strukturen, welche in einem scheinbar ungeordnetem System zur *Cluster-Bildung* führen.)

Ein Zauberer sortiert ein Kartenspiel nach den vier Farben, also z.B. Kreuz–Pik–Herz–Karo, Kreuz–Pik–Herz–Karo und so weiter. Dann läßt er einen Zuschauer den Kartenstapel abheben. Evtl. läßt er auf Wunsch des Publikums noch andere Zuschauer abheben. Anschließend fragt er, wieviele Karten er von dem Kartenstapel auf einen neuen Stapel herunterblättern soll. (Hierdurch wird die Reihenfolge der Karten in dem neu entstehenden Stapel vertauscht!) Die beiden so entstehenden Stapel läßt er von einem Zuschauer amerikanisch *mischen (oder einfach ineinander schieben). Der Zauberer steckt nun die Karten in die Hosentasche und behauptet, er könne die Karten in der Tasche wieder so sortieren, daß in jeweils vier aufeinanderfolgenden Karten wieder jede Farbe nur einmal vorkommt. Er zieht die Karten wieder aus der Hosentasche und blättert die ersten vier Karten auf. Jede Farbe kommt nur einmal vor. Das gleiche gilt für die nächsten vier und so weiter.*

Eine einfachere Version dieses Kartentricks erhält man, indem man die Karten nicht nach den vier Farben sondern einfach nach Rot und Schwarz sortiert und dann wie oben beschrieben vorgeht. Jeder 2-er Pack Karten sollte dann am Ende des Tricks aus einer roten und einer schwarzen Karte bestehen. Versuchen Sie, sich den Trick in dieser einfacheren Version (anschaulich) klar zu machen. Was macht der Zauberer in der Hosentasche? Sollte man sein BAFöG in Pokerrunden zu vermehren suchen, in denen der Geber amerikanisch mischt?

Aufgabe 2 (mdl.)

Das folgende Rätsel stammt von *Raymond Smullyan*, welcher in Deutschland durch Bücher wie *'Alice im Rätselland', 'Logik-Ritter und andere Schurken', 'Dame oder Tiger', 'Simplicius und der Baum'* und *'Spottdrosseln und Metavögel'* bekannt wurde. Er wurde 1918 in New York geboren, wo er mit 12 Jahren die High School verließ, um im Selbststudium moderne Algebra und Logik zu lernen. (Nicht zur Nachahmung empfohlen! Aber dafür sind Sie ja sowieso schon zu alt!) Später wurde Raymond Smullyan dann Professor für mathematische Logik und lehrte an diversen Universitäten in New York.

Auf einer Bank sitzen 3 Personen nebeneinander, von denen Sie wissen, daß eine immer die Wahrheit sagt, eine immer lügt und eine manchmal die Wahrheit sagt und manchmal lügt, ganz nach Belieben. Sie sollen nun mit 3 Fragen herausfinden, wer wer ist. Nachdem Sie die erste Frage gestellt haben, dürfen Sie entscheiden, wie die zweite Frage lautet und an welche der Personen Sie sie richten wollen etc. Die Fragen sollten von den Personen eindeutig mit Ja oder Nein beantwortbar sein. Wie gehen Sie vor? (Verwechseln Sie dieses Rätsel nicht mit der wohlbekannten simplen Version, in der nur der Wahrheitsliebende und der Lügner vorkommen!)

Raymond Smullyan stellte dieses Rätsel einmal auf einer Konferenz im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, welche ich besuchte. Er sagte, er habe dieses Rätsel in keines seiner Bücher aufgenommen, da es ihm zu schwer erscheine und er sich Sorgen mache, daß manche seiner Leser wahnsinnig würden, wenn Sie nicht auf die Lösung kämen. (Er hatte aus Leserbriefen erfahren, wie lange und intensiv sich manche Leser mit den von ihm gestellten Aufgaben beschäftigten!) Ich habe die Lösung des Rätsels übrigens geträumt! Ich bin im Schlaf hochgeschreckt, habe die geträumte Lösung aufgeschrieben und am nächsten Morgen kontrolliert. Und siehe da, sie stimmte! Klingt wie ein Klischee, ist aber wahr! Thomas.

Aufgabe 3 (mdl.)

Sie werden an der Uni studentische Hilfskraft (wie ihr Übungsgruppenleiter) und verdienen daher enorm viel Geld! (Achtung: Satire!) Dieses Geld tragen Sie ins Casino, wo ein neues Spiel angeboten wird. Die Bank hat einen Kartenstapel vor sich, in dem sich ebensoviele rote wie schwarze Karten befinden (z.B. 5 rote und 5 schwarze). Leider wird der Stapel gemischt, so daß Sie die Reihenfolge der Karten nicht kennen. Sie müssen sich nun für ein Startkapital entscheiden (z.B. 100,- DM) und jedesmal die Hälfte ihres Kapitals einsetzen. Die Bank zieht eine Karte. Ist sie schwarz, so haben Sie gewonnen und ist sie rot, so gewinnt die Bank. Gespielt wird, bis der Kartenstapel aufgebraucht ist und in jeder Runde müssen sie genau die Hälfte ihres Kapitals setzen. Spielen Sie mit?

Wer einen Computer oder programmierbaren Taschenrechner hat, sollte ruhig erst *einmal eine Simulation dieses Spiels programmieren, um einen ersten Eindruck zu gewinnen. Sie werden erstaunt sein!*

Aufgabe 4 (12 Punkte)
Beweisen Sie *Satz 1.4.1* der Vorlesung (Rundung, absoluter Fehler, relativer Fehler).

Aufgabe 5 (9 Punkte)
Wir wollen nun das Rechnen mit *kurzer Arithmetik* betrachten. (Leider gibt es hier keine allgemeingültigen Regeln bzw. Konzepte, sondern es muß in jedem Einzelschritt der Berechnung überprüft werden, daß dieser numerisch stabil ausgeführt wurde.)

(a) Berechnen Sie in 2-stelliger und in 3-stelliger Arithmetik zur Basis 10 den Ausdruck $x^3 \cdot 1000$ für $x = 10^{-1}$.

(b) Bekanntlich gilt: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Berechnen Sie in 4-stelliger Arithmetik zur Basis 10 die Ausdrücke $\sin(x)^2$ und $1 - \cos(x)^2$ für $x = 10^{-2}$ und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von Sinus und Kosinus.

(c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Wie Sie wissen, gelten für die *quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $|4ac| < b^2$ die Lösungsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2a}(-b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Wir betrachten nun den Fall: $|4ac| \ll b^2$. Überlegen Sie sich, warum hier bei der Berechnung von x_2 numerische Instabilität auftritt, wenn man mit kurzer Arithmetik arbeitet, wohingegen die Berechnung von x_1 relativ unproblematisch bleibt. Geben Sie eine andere Formel zur Berechnung von x_2 an, bei deren Auswertung der Fehler in der gleichen Größenordnung bleibt wie bei der Berechnung von x_1.

Hinweis: x_2 kann durch x_1 ausgedrückt werden.

Aufgabe 6 (9 Punkte)
Stellen Sie die Zinseszinsformeln für die folgenden Fälle auf:

(a) Sie zahlen bei einer Bank ein Startkapital x_0 auf ein Konto ein. Die Bank verzinst Ihnen dieses mit $p\%$ pro Jahr. Wieviel Geld x_n besitzen Sie nach n Jahren? Lösen Sie die Formel für x_n auch nach x_0, p und n auf.

(b) Sie gehen vor wie in Fall (a), vereinbaren mit der Bank jedoch eine jährliche Zuzahlung einer festen Summe Z beginnend mit dem Ablauf des ersten Jahres. Wie hoch ist nun ihr Kapital nach n Jahren?

Wer mag, der kann auch die Zinseszinsformel für den häufig auftretenden Fall einer festen Verzinsung mit *monatlicher* Zuzahlung aufstellen.

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion und — für (b) — ihr Wissen über die geometrische Reihe.

Aufgabe 7 (mdl.)

Viele bekannte kombinatorische Probleme beschäftigen sich mit *Dominosteinen*. Über die Geschichte des Dominospiels ist überraschend wenig bekannt. In der abendländischen Literatur gibt es erst ab der Mitte des 18. Jahrhunderts Hinweise darauf. In China war es schon viele Jahrhunderte früher bekannt (wenn auch in einer etwas anderen Version; s. z.B. Stewart Culins Buch *Games of the Orient* von 1895, welches 1958 von Charles Tuttle neu aufgelegt wurde). [Fällt Ihnen bei den beiden vorhergehenden Jahreszahlen etwas auf? Ist das Buch 1985 vielleicht noch einmal erschienen?] Das westliche Standardspiel besteht aus 28 Steinen, die alle möglichen Paarungen der Augenzahlen von Null bis Sechs zeigen. Wir wollen einen Satz *vollständig* nennen, wenn er alle Kombinationen von Doppel-Null bis Doppel-n für eine natürliche Zahl n enthält und darüber hinaus keine weiteren Steine. Eines der ältesten kombinatorischen Probleme mit Dominosteinen ist es, herauszufinden, auf wieviele verschiedene Arten ein vollständiger Satz in einer Reihe — den Dominoregeln entsprechend — aneinandergelegt werden kann. (Die Dominoregel besagt, daß sich berührende Steine an der Kontaktstelle mit den Augenzahlen übereinstimmen müssen.) Lassen wir den trivialen Satz, bestehend aus nur einem Stein, beiseite und betrachten den einfachsten vollständigen Satz ($n = 1$). Hier ergibt sich nur eine Reihe, nämlich $0-0$, $0-1$, $1-1$ und deren Umkehrung. Betrachten Sie die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Hinweis: Das Problem läßt sich formalisieren indem man Pfade in geeigneten Graphen betrachtet. Überlegen Sie sich dies. Es hat auch etwas mit dem berühmten *Königsberger Brückenproblem* zu tun. (Vielleicht finden Sie das selbst heraus. Ansonsten wird Ihr Übungsgruppenleiter es Ihnen schildern.) Im Fall $n = 3$ kann man übrigens eine sehr kurze Antwort mit Begründung geben!

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 := a_2 := 1, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

definierten Zahlen werden *Fibonaccizahlen* genannt. Benannt sind sie nach Leonardo von Pisa (1170–1250 ???), welcher besser unter dem Namen Fibonacci bekannt ist. Er entdeckte diese Zahlenreihe als Lösung zu folgendem Problem:

Angenommen ein Kaninchenpaar wird in einen Käfig gesperrt, um sich zu vermehren. Nehmen wir weiter an, daß Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt erstmalig Junge werfen — jeweils ein Paar — und von da ab jeden Monat. Wenn keine Kaninchen sterben, wieviele Kaninchenpaare sind dann nach einem Jahr in dem Käfig?

Die Berühmtheit der Fibonaccizahlen beruht natürlich *nicht* auf dieser etwas dubiosen Aussage zur Kaninchenvermehrung, sondern auf ihrer Nützlichkeit für viele mathematische Problemstellungen und einer unglaublichen Fülle von interessanten Resultaten, welche im Laufe der Zeit über sie entdeckt worden sind. Aus Teil (a) dieser Aufgabe läßt sich z.B. leicht ableiten, daß $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = g$ ist, wobei g den *Goldenen Schnitt* bezeichnet, ein Teilverhältnis, welches in der Architektur der Antike und der italienischen Renaissance eine hervorragende Rolle spielte.

(a) Beweisen Sie folgendes überraschendes Ergebnis:

$$a_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

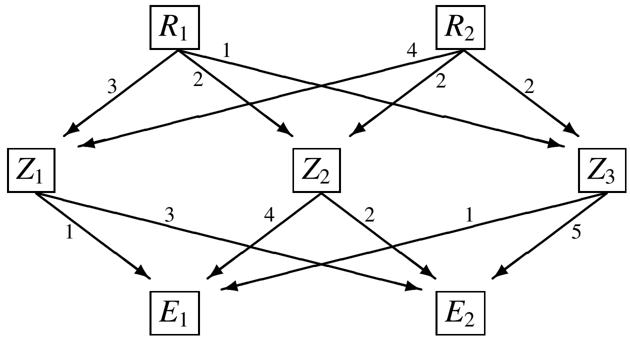
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Das können Sie natürlich nur, weil Ihnen schon bekannt ist, welche Formel Sie beweisen sollen! Weiß man dies nicht, so würde man ein solches Problem z.B. durch Lösen der Rekursionsgleichungen mit der Methode der *erzeugenden Funktionen* angehen. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und besitzt die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$ einen positiven Konvergenzradius, so nennt man f die *erzeugende Funktion* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Im Falle der Fibonacci-Folge ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}$ für $|x| < \frac{1}{2}$. Die Nullstellen des Polynoms x^2+x-1 sind $x_1 := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Durch weitere Analyse und Verwendung des *Identitätssatzes* für Potenzreihen erhält man dann die Formel in Teil (a). (Siehe: H. Heuser / Lehrbuch der Analysis / Teil 1 / B.G. Teubner Stuttgart / Kap. VIII.64.15.)

(b) In der Vorlesung wurde die Laufzeitfunktion des *euklidischen Algorithmus* zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen $m \geq n \geq 2$ betrachtet. Es wurde gezeigt, daß die Gesamtlaufzeit des Algorithmus durch $4(\log_2(m) + 1)$ beschränkt ist. Überlegen Sie sich, daß diese Schranke mit Hilfe der Fibonaccizahlen verbessert werden kann.

Hinweis: Rufen Sie sich noch einmal den Beweis von *Beispiel 1.5.1* der Vorlesung ins Gedächtnis.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Ein Betrieb stellt 2 Endprodukte E_1, E_2 her, welche aus 2 Rohstoffen R_1, R_2 mittelbar über 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 gewonnen werden. Der Materialverbrauch (in betriebsinternen Einheiten) für die verschiedenen Produktionsstufen wird durch folgendes Flußdiagramm wiedergegeben:



Ein Kunde bestellt nun 300 Einheiten E_1 und 100 Einheiten E_2. Berechnen Sie den Rohstoffbedarf, welcher für die Produktion dieser Bestellung notwendig ist.

Hinweis: Dies ist eine typische Aufgabe zur *Bedarfsrechnung*. Tip: Matrizen!

Aufgabe 10 (mdl.)

In der Vorlesung wurde definiert, wann eine Funktion *berechenbar* heißt. Es wurde auch gezeigt, daß es eine *nicht berechenbare* Funktion $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ gibt. Überlegen Sie sich, ob die Funktion

$$f = \begin{cases} 1, & \text{falls Gott existiert,} \\ 0, & \text{falls Gott } \textit{nicht} \text{ existiert.} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Beweisen Sie *Proposition 2.2.5* der Vorlesung (Transpositionsmatrizen sind selbstinvers; Charakterisierung von Permutationsmatrizen).

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie eine LU–Zerlegung durch und lösen Sie dann zur Kontrolle das Gleichungssystem mit Hilfe dieser Zerlegung.

Aufgabe 13 (10 Punkte)
INPUT-OUTPUT-ANALYSE [nach W. Leontief].
Eine Volkswirtschaft bestehe aus n Wirtschaftszweigen (oder: *Sektoren*). Jeder dieser Sektoren bezieht in einer solchen Volkswirtschaft Güter oder Leistungen aus anderen Sektoren (*Input*) und gibt wiederum selbst Güter oder Leistungen an andere Sektoren ab (*Output*).

Die Produktion x_i des i-ten Sektors setzt sich wie folgt zusammen:

- x_{ii} := der Teil von x_i, welcher im Sektor i selbst benötigt wird.
- x_{ij} := der Teil von x_i, welcher in den Sektor j geht ($i \neq j$).
- y_i := der Teil von x_i, welcher die Volkswirtschaft verläßt, also konsumiert oder exportiert wird. (Kurz: *Konsum*.)

Es gilt also: $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$.

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß die benötigten Inputs der Sektoren linear vom Output abhängen, d.h.:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Die Koeffizienten a_{ij} heißen die *Verbrauchskoeffizienten* und die $(n \times n)$–Matrix $A := (a_{ij})$ die *Verflechtungsmatrix* der Volkswirtschaft.

Es sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 \end{smallmatrix} \right)$ die Verflechtungsmatrix einer *sehr kleinen* Volkswirtschaft, welche nur aus 2 Sektoren besteht. Für die nächste Planungsperiode wird ein Konsum von $y_1 = 10$ und $y_2 = 30$ geschätzt. Berechnen Sie, welche Produktion x_1, x_2 notwendig ist um diesen Konsumbedarf zu befriedigen.

Die oben vorgestellte Input-Output-Analyse läßt sich natürlich statt auf eine Volkswirtschaft auch auf einen einzelnen Betrieb anwenden, welcher aus mehreren Sektoren (z.B. Abteilungen) besteht.

Aufgabe 14 (10 Punkte)
Durch die *symmetrische* Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

wird eine *quadratische Form* $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diagonalisieren Sie A durch geeignete Koordinatentransformation, d.h. bringen Sie Φ auf eine Gestalt, in welcher nur noch rein quadratische Terme auftreten.

Hinweis: Erinnern Sie sich, daß die quadratische Form Φ durch den Ausdruck $x^T Ax$ für $x \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Schreiben Sie Φ konkret hin und führen Sie eine *quadratische Ergänzung* durch.

Aufgabe 15 (mdl.)

In der letzten Übungsserie haben Sie die *Fibonaccizahlen* kennengelernt. Wenn Sie nun vor die Aufgabe gestellt würden, diese in einem Computerprogramm zu implementieren, dann könnten Sie folgende Prozedur schreiben, welche an Einfachheit und Transparenz kaum zu überbieten ist:

```
fib := proc(n)
begin
if n<2 then n else fib(n-1)+fib(n-2) end_if;
end_proc:
```

(Die Notation hier entspricht dem Computeralgebrasystem MuPAD, sollte aber selbsterklärend sein.) Überlegen Sie sich, warum diese Implementierung der Fibonaccizahlen problematisch ist und finden sie andere Möglichkeiten, die Fibonaccizahlen einem Programm als Prozedur zur Verfügung zu stellen.

Hinweis: Wer einen Computer oder programmierbaren Taschenrechner hat, der sollte obige Prozedur einmal programmieren und z.B. durch inkrementieren einer globalen Variablen überprüfen, wie oft die Prozedur sich selbst aufruft für n = 1,2,3,....

Nachtrag: Fibonaccizahlen haben übrigens mehr mit Drohnen (männliche Bienen) zu tun als mit Kaninchen. Eine Drohne hat nämlich keinen Vater. Somit gestaltet sich die Ahnenreihe einer Drohne wie folgt: 1 Elternteil (seine Mutter), 2 Großeltern (die Eltern der Mutter), 3 Urgroßeltern (weil der Vater der Mutter keinen Vater hatte), 5 Ururgroßeltern und so weiter in der Fibonaccifolge.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ wurde in der Vorlesung folgende Notation eingeführt:

(i) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,

(ii) $||x||_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

(iii) $||x||_\infty := \max_{1 \le i \le n}\{|x_i|\}$.

Beweisen Sie, daß dies tatsächlich *Normen* sind.

Aufgabe 17 (10 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Satz, welcher besagt, daß alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ auf eine gewisse Art und Weise zueinander äquivalent sind.

Für jedes Paar von Normen $n_1(x)$, $n_2(x)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) existieren Konstanten $k, K > 0$, so daß gilt:

$$k \cdot n_2(x) \leq n_1(x) \leq K \cdot n_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (bzw.\ \mathbb{C}^n).$$

Im Beweis dürfen Sie benutzen, daß jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ eine (gleichmäßig) *stetige* Funktion bzgl. der Metrik $\rho(x, y) := \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i - y_i|\}$ ist. (Wer mag, der sollte sich auch einmal den Beweis für diesen Satz überlegen.)

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $n_2(x) := ||x||_1$. Die Menge $M := \{x \in \mathbb{C}^n | \max_i\{|x_i|\} = 1\}$ ist eine *kompakte* Teilmenge des $\mathbb{C}^n$. Da $n_1(x)$ *stetig* ist, existieren somit...

Aufgabe 18 (10 Punkte)
Überprüfen Sie, welche der beiden folgenden symmetrischen Matrizen *positiv definit* ist.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sollte eine der Matrizen positiv definit sein, so bestimmen Sie deren Cholesky-Faktorisierung und lösen Sie auf diesem Wege das folgende Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

wobei A die positiv definite Matrix aus (a) bzw. (b) bezeichnet.

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \qquad \text{mit} \qquad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie dieses mit 2-stelliger Arithmetik, indem Sie die Gaußsche Eliminationsmethode durchführen. Wählen Sie einmal a_{11} und einmal a_{21} als Pivotelement im 1. Schritt. Vergleichen Sie die Lösungen, welche Sie so erhalten! (Dieses Beispiel illustriert *Bemerkung 2.2.11* im Skript!)

Aufgabe 20 (mdl.)

Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie die Wurzel aus einer Zahl bestimmen sollten (z.B. $\sqrt{2}$) und nicht die gleichsam magischen Fähigkeiten eines Taschenrechners mit Wurzeltaste zur Verfügung hätten? Einem sehr alten Verfahren *(Heron-Verfahren)* zur Lösung dieses Problems liegt folgende geometrische Idee zu Grunde:

Versuche ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt n ist. Die Seitenlänge dieses Quadrates ist dann $\sqrt{n}$. Starte mit einem Rechteck, welches die Seitenlängen $a_0 = n$ und $b_0 = 1$ hat. Dessen Flächeninhalt ist natürlich n. Konstruiere nun ein neues Rechteck, dessen eine Seite die Länge a_1 = arithmetisches Mittel aus a_0 und *b_0 hat und dessen andere Seite eine Länge b_1 hat, welche so gewählt wird, daß das Rechteck wieder einen Flächeninhalt von n aufweist. Fahre nun so fort und konstruiere auf diese Weise immer neue Rechtecke. Diese nähern sich immer mehr dem gesuchten Quadrat.*

Man erhält also zwei Folgen (a_i) und (b_i). Zeigen Sie, daß diese von oben bzw. von unten gegen $\sqrt{n}$ konvergieren und eine Intervallschachtelung für den gesuchten Wert liefern.

Bemerkungen: Man kann bei diesem Verfahren sehr schön sehen, auf wieviele Stellen genau man die gesuchte Wurzel schon berechnet hat! (Woran?) Außerdem konvergieren die beiden Folgen sehr schnell gegen den gesuchten Wert.

Aufgabe 21 (6 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *orthogonale* Matrix. Zeigen Sie, daß gilt: $||A||_2 = 1$.

Bemerkung: Benutzen Sie bitte nur die Definitionen von $||\_||_2$ und orthogonalen Matrizen. Weitere Ergebnisse sind nicht notwendig!

Aufgabe 22 (12 Punkte)

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von *Satz 2.6.4* der Vorlesung (unter den dort angenommenen Voraussetzungen).

Seien x und $x+\Delta x$ Lösungen der Systeme $Ax = b$ bzw. $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$. Dann läßt sich der relative Fehler abschätzen durch:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||} \right).$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu *Satz 2.6.4* lassen wir hier also auch eine fehlerbehaftete rechte Seite des Gleichungssystems zu.

Aufgabe 23 (12 Punkte)

Modellbildung: Das Ende der Prohibition in Amerika stellte die *'Familie'* vor das Problem, das nun legale Alkoholgeschäft nach marktwirtschaftlichen Grundsätzen zu betreiben. Glücklicherweise hatte der Pate seinen Sohn in weiser Voraussicht Wirtschaftsinformatik studieren lassen. Da es leider noch nicht viele Computer gab, war dieser natürlich arbeitslos, aber sein theoretisches Wissen konnte er nun sinnvoll in die Familiengeschäfte einbringen. Im Lagerhaus der Familie fand er neben den üblichen Mafiautensilien (Beton, Maschinenpistolen, etc.) noch 2000 Flaschen Whisky der Marke Winfriddich, 2500 Flaschen Korbelschnaps und 1200 Flaschen 50-prozentiger Brennspiritus. Nach einer feuchtfröhlichen Marktanalyse (in verschiedenen Bars und Kneipen) sah der Sohn des Paten keine großen Absatzchancen für diese Originalprodukte. Daher beschloß er, durch Mischen die neuen Whiskysorten Winnie Talker, Blonde Beauty und Simple produzieren zu lassen, welche zu 22.5 cts, 28.5 cts bzw. 34 cts pro Flasche verkauft werden sollten. Als Wiederbeschaffungspreis für die Ausgangsprodukte Winfriddich, Korbelschaps und Brennspiritus konnte er 35 cts, 25 cts bzw. 20 cts pro Flasche ermitteln. Auf einigen Familienfeiern wurden durch exzessives Probieren folgende Vorgaben für die Mischungsverhältnisse festgelegt:

Winnie Talker	wenigstens	60% Winfriddich
	höchstens	20% Brennspiritus
Blonde Beauty	wenigstens	15% Winfriddich
	höchstens	60% Brennspiritus
Simple	höchstens	50% Brennspiritus

Absatzschwierigkeiten waren auf Grund der langjährigen guten Kontakte in der Alkoholbranche und einem familieneigenen Talent, Kunden mit *handfesten* Argumenten zu überzeugen, nicht zu befürchten. Wie sah das Lineare Programm aus, das der Sohn des Paten für dieses Problem im Hinblick auf eine Gewinnmaximierung (Erlös – Wiederbeschaffungspreis) aufstellte?

Bemerkung: Leider konnte die Familie dann doch nicht im legalen Alkoholgeschäft Fuß fassen, da der Sohn des Paten sein Studium abgebrochen hatte, bevor er lernen konnte, wie man ein solches Lineares Programm löst!

Aufgabe 24 (mdl.)

In folgendes Schema soll eine 10-stellige Zahl eingetragen werden, welche sich in folgendem Sinne selbst beschreibt: Die Ziffer im Feld n soll angeben, wie oft die Ziffer n in der Zahl selbst vorkommt. Steht also z.B. eine 3 im Feld 5, so muß die 5 dreimal in der Zahl als Ziffer vorkommen.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Wieviele Lösungen existieren zu diesem Problem und wie lauten sie?

Hinweis: Natürlich könnten Sie ein Computerprogramm schreiben, welches alle möglichen Zahlen daraufhin überprüft, ob sie sich in obiger Art und Weise selbst beschreiben. Aber das sind immerhin 10 Milliarden Zahlen und das Erstellen des Programms ist auch ein gewisser Zeitaufwand. Eine Lösung mit Papier und Bleistift (bei geeignetem systematischen Ansatz) sollte deutlich schneller zu erreichen sein.

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Das *Farkas' Lemma* der Vorlesung wird oft in folgender äquivalenter Formulierung angegeben:

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

entweder (a) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b$,

oder (b) $\exists u \in \mathbb{R}^m_+ : u^T A = 0$ *und* $u^T b < 0$,

aber nicht beides.

Leiten Sie diese Form des *Farkas' Lemmas* aus der Ihnen bekannten her.

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Aussage der *Übung 3.1.6* des Skripts:

Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform ist ein Polyeder.

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[p, q]$ die *Verbindungsstrecke* zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$[p, q] := \{(1-\lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}.$$

Wir sagen, eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $p, q \in K$ auch $[p, q] \subset K$ gilt. Beweisen Sie nun folgenden Satz:

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sind $p_0, \ldots, p_k \in K$, so enthält K jede Konvexkombination $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k$.

Hinweis: Erinnern Sie sich: Konvekkombination heißt, daß $\lambda \geq 0$ und $\lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1$ gilt. Führen Sie Induktion nach k durch.

Aufgabe 28 (mdl.)
Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier 3 Häuser, ein Kraftwerk, ein Gaswerk und einen Wasserturm. Jedes der Häuser soll nun mit allen 3 Versorgern verbunden werden (angedeutet durch einen Strich oder eine Kurve mit dem Stift), jedoch so, daß sich die Verbindungslinien *nicht* überschneiden! *(Grund: Der Boden in dieser Gegend ist ab einer geringen Tiefe schon sehr hart und man kann Rohre nicht übereinander verlegen. So eine Situation trifft man z.B. in Helsinki/Finnland an. Die Stadt ist quasi auf Granit gebaut.)* Ist dieses Problem *planar* (d.h. auf Ihrem Blatt Papier) lösbar?

Zusatz: Was wäre, wenn Helsinki sich nicht in Finnland sondern auf einem *Möbiusband* befinden würde? Natürlich gehen wir auch hier davon aus, daß es in Helsinki nur 3 Häuser und 3 Versorger gibt!

Aufgabe 29 (6 Punkte)
Dualisieren Sie die beiden folgenden linearen Programme:

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (b) \quad \begin{array}{ll} \min & u^T b \\ \text{unter} & u^T A \geq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$$

(Notation wie in der Vorlesung.)

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Zeigen Sie *Übung 3.3.5* des *neuen* Skripts:

Das duale Programm des dualen Programms ist das primale Programm. Folgern Sie hieraus: Ist das primale Programm zulässig und beschränkt, so gibt es für beide Programme Optimallösungen x^* und y^* und es gilt: $c^T x^* = y^{*T} b$.

Diskutieren Sie ebenfalls den Unterschied zu Satz 3.3.3 (a) der Vorlesung.

Hinweis: Bringen Sie das duale Programm in Standardform und dualisieren Sie.

Aufgabe 31 (8 Punkte)
Wahrscheinlich wissen Sie alle, was ein *Graph* ist. Er besteht aus *Knoten* und *Kanten*. (In einer früheren Übungsserie haben wir schon einmal Graphen betrachtet;

und zwar hinsichtlich der Lösung des Problems mit den Dominosteinen!) Formal ist ein Graph G ein geordnetes Paar von disjunkten Mengen (V, E), so daß E eine Untermenge der Menge der ungeordneten Paare von Elementen aus V ist. Ist G ein Graph, so nennt man $V = V(G)$ die Menge der Knoten und $E = E(G)$ die Menge der Kanten von G. (Die Bezeichnungen stammen natürlich aus dem Englischen: set of *vertices*, set of *edges*.) Ist $e = (v_1, v_2) \in E$, so heißt dies, daß e eine Kante ist, welche die Knoten v_1 und v_2 miteinander verbindet. Das folgende ist ein Beispiel für einen einfachen Graphen mit 5 Knoten und 4 Kanten:

$$\begin{array}{lllll}
v_1 & e_1 & v_2 & e_2 & v_3 \\
\mathrm{o} & \text{—} & \mathrm{o} & \text{—} & \mathrm{o} \\
\mid e_3 & & \mid e_4 & & \\
\mathrm{o} & & \mathrm{o} & & \\
v_4 & & v_5 & &
\end{array}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Graphen ist die sogenannte *(Knoten–Kanten)–Inzidenzmatrix*. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, so ist die Inzidenzmatrix von G die $n \times m$ Matrix A, welche gegeben ist durch:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls zu dem Knoten } v_i \text{ die Kante } e_j \text{ hinführt,} \\ 0, & \text{falls zu dem Knoten } v_i \text{ die Kante } e_j \textit{ nicht} \text{ hinführt.} \end{cases}$$

Wir wollen nun spezielle Graphen betrachten. Ein Graph G heißt *bipartit* mit Knotenmengen V_1, V_2, wenn $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt und jede Kante einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es werden also keine Knoten von V_1 untereinander verbunden. Das gleiche gilt für Knoten aus V_2. (Wenn Sie auf ein Blatt Papier verschiedene Mädchen und Jungen malen und jedes Mädchen mit jedem Jungen verbinden, den sie schon einmal geküsst hat, dann erhalten Sie einen bipartiten Graphen. Etwas albern vielleicht, aber in der Literatur werden viele Probleme und Ergebnisse zu bipartiten Graphen über solche Mädchen–Junge, Mann–Frau Beziehungen verdeutlicht!) Lösen Sie nun folgende Aufgaben:

(a) Stellen Sie die Inzidenzmatrix zu obigem Beispiel (Graph mit 5 Knoten und 4 Kanten) auf.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Inzidenzmatrix eines Graphen mit 3 Knoten, welche alle durch Kanten miteinander verbunden sind. (Der Graph sieht also wie ein Dreieck aus!)

(c) Überlegen Sie sich, daß alle Unterdeterminanten der Inzidenzmatrix eines *bipartiten* Graphen den Wert 0, 1 oder −1 haben. (Solche Matrizen nennt man *total unimodular*.)

Bemerkung: Warum die Determinanten von Inzidenzmatrizen für uns interessant sind, sehen Sie in der nächsten Aufgabe, welche in der kommenden Übungsserie wieder aufgegriffen wird!

Aufgabe 32 (6 Punkte)
Es sei A eine reguläre Matrix. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ und nehmen an, daß die Komponenten von b alle ganzzahlig sind. Zeigen Sie nun: Falls A die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist obiges Gleichungssystem ganzzahlig lösbar.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, was Determinanten mit dem Lösen von linearen Gleichungssystemen bzw. inversen Matrizen zu tun haben und benutzen Sie dann Aufgabe 3 (c).

Aufgabe 33 (mdl.)
Viele Zaubertricks und Rechenkunststücke beruhen auf sogenannten *zyklischen Zahlen*. Hierunter versteht man eine natürliche Zahl mit n Stellen (führende Nullen werden zugelassen und als Stellen mitgezählt!), welche folgende ungewöhnliche Eigenschaft hat: Wenn die Zahl mit einer natürlichen Zahl von 1 bis einschließlich n multipliziert wird, so enthält das Produkt die *gleichen n* Ziffern der ursprünglichen Zahl in *derselben* zyklischen Reihenfolge. (Die Ziffern der Zahl werden bei der Multiplikation also nur zyklisch permutiert.) Die einfachste zyklische Zahl ist natürlich die 1. Können Sie die nächste zyklische Zahl finden? Diese hat übrigens keine führende Null (ist also eine *echte* natürliche Zahl). Außer der trivialen 1 ist sie aber auch die einzige zyklische Zahl ohne führende Null. (Sie werden sehen, warum!) Alle Methoden sind zugelassen: Computer, theoretischer Ansatz oder einen Zauberer fragen. Von letzteren wird Ihnen wahrscheinlich fast jeder die Zahl nennen können, da sie in deren Kreisen extrem bekannt ist.

Aufgabe 34 (10 Punkte)
Wir wollen noch einmal bipartite Graphen betrachten (s. letzte Übungsserie). Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist das sog. *matching*. Sei G ein bipartiter Graph mit Knotenmengen V_1 und V_2. Man spricht von einem *perfekten matching*, wenn jeder Knoten aus V_1 über eine Kante mit einem Knoten aus V_2 verbunden ist, ohne daß zwei Knoten aus V_1 demselben Knoten aus V_2 zugeordnet werden müssen. Sei V_1 z.B. eine Menge von Frauen und V_2 eine Menge von Männern. Eine Kante zwischen $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ soll bedeuten, daß die Frau v_1 den Mann v_2 heiraten könnte (weil sie sich kennen und mögen und die Familie nichts dagegen hat etc. etc.). Kann man nun alle Frauen verheiraten, so erhält man ein perfektes matching (wobei man je nach Definition eigentlich noch die verbleibenden Männer aus dem Graphen streichen müßte). Ist es nicht möglich, alle Frauen zu verheiraten und betrachtet man nur die maximale Anzahl von Frauen,

welche verheiratet werden können, so erhält man den Begriff des *maximalen matching* (bzw. genauer: *kardinalitätsmaximales matching*). Maximales matching bedeutet also, daß man den größten Untergraphen von G betrachtet, in welchem man perfektes matching erhält. Folgender *Satz von König* beschreibt maximales matching:

$$\text{max. \# matching} \;=\; \text{min. \# Überdeckung.}$$

Gemeint ist hiermit, daß die Anzahl der Knoten aus V_1, welche zu einem maximalen matching gehören, mit der minimalen Anzahl der Knoten (aus V_1 und V_2) übereinstimmt, welche benötigt werden, damit jede Kante des gesamten Graphen mit einem dieser Knoten inzidiert (d.h. verbunden ist; diese Knoten *überdecken* also die Kantenmenge des Graphen). Betrachten Sie z.B. den bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ mit

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad V_2 = \{v_4, v_5, v_6\} \text{ und } E = \{(v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_6), (v_3, v_5)\}.$$

Ein maximales matching wird hier z.B. durch die *zwei* Paare (v_1, v_5) und (v_2, v_4) gegeben. Und die *zwei* Knoten v_2 und v_5 inzidieren mit allen Kanten des Graphen (und man kann nicht weniger Knoten mit dieser Eigenschaft finden). Dies ist die Aussage des Satzes von König, welchen Sie nun beweisen sollen! Definieren Sie sich hierzu in geeigneter Weise zwei Vektorräume: einen *Knotenraum* und einen *Kantenraum* und überlegen Sie sich, wie die *Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix* des Graphen (s. letzte Übungsserie) zwischen diesen Vektorräumen als Abbildung funktioniert. Beschreiben Sie dann maximales matching in einem bipartiten Graphen durch ein lineares Programm. Dualisieren liefert dann die Aussage des Satzes von König.

Aufgabe 35 (8 Punkte)

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe des Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_1 + 3x_2 \\ \text{unter} & \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ x_1 & \geq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 36 (Vorsicht falsch! 12 Punkte)

Wie im Skript versprochen (neuer Skript, S. 48) wollen wir nun ein Beispiel für mögliches *Kreisen* (oder: *Zykeln*) des Simplexverfahrens betrachten:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2x_2 + 4x_4 + 4x_6 & & \\ \text{unter} & x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 6x_6 & = & 0 \\ & 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 & = & 0 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das zu $B = \{1, 2\}$ gehörige Tableau.

(b) Iterieren Sie (Simplexverfahren) unter Verwendung der *Steilster-Anstieg-Regel* (s. neuer Skript §3.6), bis Kreisen eintritt.

(c) Überlegen Sie sich, wie man das Kreisen verhindern kann.

Zusatzaufgabe: *(mdl.)* Stellen Sie unter Verwendung des dualen Programms die einzelnen Iterationsschritte graphisch dar.

Aufgabe 37 (mdl.)

Die drei Mathematiker Alfred, Bill und Charley gehen an jedem Werktag gemeinsam zum Mittagessen. Irgendwann stellten Sie fest, daß ihre Gewohnheit einen Martini zu trinken durch folgende Regeln beschrieben werden kann:

1) Wenn Alfred einen Martini bestellt, dann macht Bill das auch.

2) Entweder Bill oder Charley bestellt einen Martini, aber nie beide beim gleichen Mittagessen.

3) Alfred oder Charley oder beide bestellen immer einen Martini.

4) Wenn Charley einen Martini bestellt, dann macht Alfred das auch.

Können Sie einfacher sagen, wer wann einen Martini trinkt?

Tip: Es gibt sicherlich viele Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen. Eine elegante Lösung erhält man jedoch durch Verwendung sog. *Venn-Diagramme*. Das sind diese Kreise, welche die meisten von Ihnen wahrscheinlich schon im Mengenlehre-Unterricht der Grundschule gezeichnet haben. Identifizieren Sie *'Martini bestellen'* mit *wahr* und *'keinen Martini bestellen'* mit *falsch* und zeichnen Sie dann geeignete Venn-Diagramme.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe der *Zweiphasenmethode*:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 39 (10 Punkte)
In der Praxis ist es oftmals so, daß die Variablen in linearen Programmen sowohl unteren als auch *oberen Schranken* unterliegen. (Z.B. ist der Grad einer Produktion durch die Kapazitäten der Fabrik beschränkt bzw. die Menge der verfügbaren Rohstoffe durch Transportkapazitäten etc. etc.) Also gelten üblicherweise folgende Einschränkungen für eine Variable x_i in einem linearen Programm:

$$u_i \leq x_i \leq o_i \qquad (u_i = \underline{u}\text{ntere Schranke}, o_i = \underline{o}\text{bere Schranke}).$$

öberlegen Sie sich, daß jedes lineare Programm mit unteren und oberen Schranken für die Variablen (üblicherweise *Lineares Programm mit oberen Schranken* genannt) z.B. in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq s \end{array}$$

öberlegen Sie sich nun, wie die obige Form in die übliche *Standardform* überführt werden kann (Tip: *Schlupfvariablen*), auf welche dann das normale Simplexverfahren anwendbar ist. Wie groß wird die Matrix des so erhaltenen linearen Programms in Standardform?

In den öbungen werden Sie eine effektivere Methode (leicht modifizierte Form des Simplexverfahrens) kennenlernen, um lineare Programme mit oberen Schranken zu lösen.

Aufgabe 40 (10 Punkte)
Redundanz in linearen Programmen. Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen in Standardform:

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Folgende 3 Fälle von *Redundanz* können in diesem System auftreten:

(1) *Redundante Gleichungen:* Eine der Gleichungen kann als Linearkombination der anderen ausgedrückt werden.

(2) *Null-Variablen:* Eine Variable x_i ist in allen Lösungen des Systems gleich Null.

(3) *Nicht-extremale Variablen:* Für eine Variable x_i ist die Ungleichung $x_i \geq 0$ redundant (d.h. es ergibt sich schon aus den Gleichungen, daß $x_i \geq a$ für ein $a > 0$ gelten muß).

Beantworten Sie nun folgende Fragestellungen:

(a) Gibt es Null-Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Gibt es nicht-extremale Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(c) Wie kann man ein System von linearen Ungleichungen in Standardform, in welchem einer der obigen Fälle von Redundanz auftritt, vereinfachen? Wie sieht eine solche Vereinfachung für (a) und (b) aus?

Aufgabe 41 (mdl.)
Sie erholen sich in einem Ruderboot auf einem kreisrunden See. Plötzlich entdecken Sie am Ufer einen Mathematiker mit einer neuen öbungsserie, welche er Ihnen aufdrängen will! Nach einiger Zeit der Beobachtung kommen Sie zu dem Schluß, daß der Mathematiker wohl Nichtschwimmer ist, aber genau viermal so schnell laufen kann, wie Sie rudern. Er kann aber nicht so schnell laufen wie Sie. Könnten Sie also mit dem Boot eine Stelle des Ufers erreichen, ohne dort den Mathematiker mit der öbungsserie zu treffen, so wären Sie gerettet, da Sie schneller laufen können als er!

Können Sie einen Weg finden, wie Sie einen Punkt des Ufers vor dem Mathematiker erreichen?

Aufgabe 42 (6 Punkte)
Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 43 (10 Punkte)
Die Funktionen $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (S offen) mögen in $x \in S$ Gradienten besitzen.

Dann trifft dies auch für $f+g, fg, \alpha f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) und f/g (falls $g(x) \neq 0$) zu. Zeigen Sie nun, daß die folgenden Formeln gelten (wobei als Argument jeweils x zu ergnzen ist):

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ (b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(c) $\nabla(\alpha f) = \alpha\nabla f$ (d) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Aufgabe 44 (8 Punkte)
Stellen Sie die Hessematrix der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf dem $\mathbb{R}^2$ auf.

Aufgabe 45 (6 Punkte)
Geben Sie eine Parametrisierung für eine *Zykloide* an. *(Die Zykloide beschreibt die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises (vom Radius r), wenn letzterer auf der positiven x-Achse der x−y-Ebene abrollt und besagter Punkt sich zu Beginn der Bewegung im Nullpunkt befand. Oder anders: Der Weg eines Nagels in einem Autoreifen (vorausgesetzt der Reifen wird nicht kleiner, weil er Luft verliert)!)*

Aufgabe 46 (mdl.)
Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier eine 4×4-Matrix und schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 16 von links nach rechts, angefangen mit dem Feld $(1,1)$ in die Matrix. (In der ersten Zeile steht also $1,2,3,4$, in der zweiten steht $5,6,7,8$ etc.) Whlen Sie nun ein beliebiges Feld der Matrix und kreisen Sie die Zahl dort ein. Ziehen Sie nun einen vertikalen Strich durch die Spalte, in der die eingekreiste Zahl steht und einen horizontalen Strich durch die entsprechende Reihe. Kreisen Sie dann eine der verbleibenden Zahlen ein (also eine, welche noch nicht durchgestrichen ist) und ziehen Sie wieder die entsprechenden vertikalen und horizontalen Striche. Nun wiederholen Sie dieses Verfahren noch einmal und zuletzt kreisen Sie die einzig übriggebliebene Zahl ein. Wenn man nun die 4 eingekreisten Zahlen addiert, so ergibt sich als Summe 34. Warum?

Wenn Sie erst einmal verstanden haben, wie dieser Trick funktioniert, dann können Sie sich beliebig viele Variationen davon ausdenken. Versuchen Sie es einmal!

Aufgabe 47 (mdl.)
Magische Quadrate kann man natürlich noch auf die Spitze treiben. Wer mag, der versuche einmal einen *magischen Würfel* zu konstruieren (z.B. einen $3 \times 3 \times 3$-Würfel; hier müssen Sie die Zahlen von 1 bis 27 so auf die Felder verteilen, daß sich in alle Richtungen (auch auf den Diagonalen!) immer die gleiche Summe ergibt). **Aufgabe 48** (8 Punkte)

Untersuchen Sie noch einmal *Bsp. 4.2.4* der Vorlesung, d.h. das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1 x_2 \\ \text{unter} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{array}$$

im Hinblick auf die *'Notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung'* (*Proposition 4.2.5*).

Aufgabe 49 (12 Punkte)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1,x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2, \\ \text{unter} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{array}$$

und überprüfen Sie, ob im *Inneren* des zulssigen Bereiches Lösungen existieren.

Aufgabe 50 (10 Punkte)
Betrachten Sie die Gleichung $x_1^2 + x_2 = 0$. Eine offensichtliche Lösung ist $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Gibt es eine Umgebung dieser Lösung, auf der eine Funktion Φ existiert mit $x_1 = \Phi(x_2)$? (Wenn nicht, dann überlegen Sie sich, welche Voraussetzung des *Satzes über implizit definierte Funktionen* nicht erfüllt ist. Wie sieht es mit der Existenz eines solchen Φ für die anderen Lösungen dieser Gleichung aus?)

Aufgabe 51 (mdl.)
3 Quickies *(Wenig Mathematik erforderlich, aber dennoch nett!)*

- In einem Zimmer befindet sich auf einem Tisch eine Glühbirne, vor dem Zimmer 4 Lichtschalter, welche jeweils auf 'AN' bzw. 'AUS' gestellt werden können. Aber nur einer der Lichtschalter schaltet die Glühbirne wirklich an bzw. aus. Die drei anderen sind ohne Funktion. Sie dürfen nun mit den Lichtschaltern herumspielen. Danach gehen Sie in das Zimmer und können dann beantworten, welcher der Schalter die Glühbirne steuert. (Natürlich können Sie, whrend Sie die Lichtschalter ausprobieren, nicht in das Zimmer sehen! Die Tür zu dem Zimmer ist verschlossen und lßt kein Licht durch.) Wie machen Sie das?

- Sie sind Kandidat bei einer Gameshow. Sie konnten bisher alle Fragen richtig beantworten und haben alle Aufgaben erfolgreich gelöst. Nun, in der entscheidenden Endrunde, dürfen Sie sich eine von 10 Türen aussuchen. Hinter 9 Türen befindet sich nichts, hinter der verbleibenden Tür der große Preis. Sie whlen eine Tür. Von den 9 anderen Türen öffnet der Showmaster (welcher weiß, wo sich der Preis befindet) nun 8 und zeigt, daß sich nichts dahinter befindet. Dann fragt er Sie, ob Sie ihre Tür behalten wollen, oder ob Sie lieber die von ihm noch nicht geöffnete 9te Tür nehmen wollen. Wie verhalten Sie sich?

- Ein böser Zauberer droht damit, 3 Prinzen in Frösche zu verwandeln. Er gibt ihnen jedoch noch eine Chance. Er stellt Sie hintereinander in einer Reihe auf, so daß der letzte seine beiden Vordermnner sehen kann, der mittlere nur seinen Vordermann und der erste keinen der beiden anderen. Nun verbindet der Zauberer den Prinzen die Augen und setzt jedem von ihnen einen Hut auf. Er sagt ihnen, daß die Hüte rot oder schwarz sind und daß nicht alle 3 Prinzen einen Hut der gleichen Farbe tragen. Dann nimmt er ihnen die Augenbinden wieder ab und sagt, daß er alle 3 Prinzen nicht verzaubern wird, wenn mindestens einer von ihnen innerhalb von 10 Minuten sagen kann, welche Farbe sein Hut hat. Der Zauberer aktiviert eine große Sanduhr und die Zeit luft. Nach 9 Minuten und 59 Sekunden antwortet einer der Prinzen richtig und rettet damit alle drei! Welcher Prinz war das und wie hat er die Aufgabe gelöst?

Aufgabe 52 (8 Punkte)
Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{rl} \min & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{array}$$

und lösen Sie es unter Verwendung von *Lagrange-Multiplikatoren*.

Tip: Aus dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren erhalten Sie 3 Gleichungen. Zusammen mit der Bedingung der Optimierungsaufgabe ergibt sich dann ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen in 4 Unbekannten, welches es zu lsen gilt.

Aufgabe 53 (12 Punkte)
Finden Sie Kandidaten für relative Minima des Problems

$$\begin{array}{rl} \min & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \text{unter} & x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\ & 3x_1 + x_2 \le 6 \end{array}$$

indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* überprüfen.

Hinweis: Achten Sie darauf, daß Sie verschiedene Kombinationen von *aktiven Bedingungen* annehmen knnen. Im vorliegenden Fall sind dies entweder keine, eine oder zwei Bedingungen.

Aufgabe 54 (10 Punkte)
Betrachten Sie die beiden folgenden Flächen im $\mathbb{R}^3$:

(a) $x^2 + y^2 = z^2$,

(b) $xy + x^3 + y^3 = 0$. *(Kein Fehler, z kommt hier nicht vor!)*

Skizzieren Sie die Flächen, bestimmen Sie ihre singulären Punkte (d.h. ihre *nicht* regulären Punkte) und geben Sie die Tangentialräume in den regulären Punkten der Flächen an.

Aufgabe 55 (mdl.)
Das folgende Rätsel kennen einige von ihnen schon (hat Winfried Hochstättler nach der Vorlesung erzählt). Es ist aber so schn, daß wir es noch einmal für alle aufschreiben:

Sie haben zwei Zündschnüre und ein Feuerzeug. Beide Zündschnüre brennen jeweils genau 60 Sekunden, aber leider nicht regelmäßig. (D.h., sie brennen nicht soundsoviel Zentimeter pro Sekunde, sondern mal mehr und mal weniger. Sie wissen nur, daß nach genau 60 Sekunden die gesamte Zündschnur verbrannt ist.) Sie sollen nun mit Hilfe der beiden Zündschnüre und des Feuerzeugs einen Zeitraum von 45 Sekunden mglichst genau messen. Wie gehen Sie vor? **Aufgabe 56** (10 Punkte)
Betrachten Sie das *quadratische* Programm (Notation wie immer)

$$\begin{array}{rl} \min & \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx \\ \text{unter} & Ax = c \end{array}$$

und überlegen Sie sich, daß ein Punkt x^* genau dann ein *lokales* Minimum ist, wenn er auch ein *globales* Minimum ist.

Aufgabe 57 (10 Punkte)
Beweisen Sie nochmals die LP-Dualitt (*Lineare Programme*) indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* verwenden.

Aufgabe 58 (10 Punkte)
Zur Wiederholung: Untersuchen Sie folgende Funktion auf Minima

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$$

indem sie die notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen erster und zweiter Ordnung überprüfen. (Finden Sie sogar ein *globales* Minimum?)

Aufgabe 59 (mdl.)
Das Ehepaar Feierschön organisiert eine Party, zu der sie 4 weitere Ehepaare eingeladen haben. Als die Gste eintreffen geben sich diejenigen die Hand, welche sich bisher noch nicht kannten. Alle anderen begrüßen sich einfach so. Nach der Begrüßung fragt Herr Feierschön alle anderen Anwesenden, mit wieviel Leuten Sie Hnde geschüttelt haben. Bemerkenswert ist, daß jeder eine andere Anzahl antwortet! Können Sie aus diesen Informationen ableiten, welche Zahl Frau Feierschön angegeben hat?

- Jeder kennt natürlich sich selbst und seinen Ehepartner.
- Herr Feierschön hat sich selbst *nicht* gefragt, wieviel Leuten er die Hand gegeben hat.

Aufgabe 60 (8 Punkte)
Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen, welche zeigen, daß die Kombination von *konvexen* Funktionen wieder *konvexe* Funktionen ergibt.

(a) Es seien f_1 und f_2 konvexe Funktionen definiert auf einer konvexen Menge S. Dann ist auch die Funktion $f_1 + f_2$ konvex auf S.

(b) Es sei f eine konvexe Funktion definiert auf einer konvexen Menge S. Dann ist auch αf konvex für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 61 (10 Punkte)
Zeigen Sie folgenden Satz:

Es sei f eine konvexe Funktion auf einer konvexen Menge S. Dann gilt für jede reelle Zahl c, daß die Menge $\Gamma_c := \{x \in S \,|\, f(x) \leq c\}$ konvex ist.

Angenommen Sie haben nun konvexe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf einer konvexen Menge S. Gilt dann auch, daß die Menge der Punkte x, welche

$$f_1(x) \leq c_1, f_2(x) \leq c_2, \ldots, f_m(x) \leq c_m \qquad (c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R})$$

simultan erfüllen, konvex ist?

Aufgabe 62 (12 Punkte)
Beweisen Sie folgendes klassisches Resultat über die Minimierung von konvexen Funktionen:

Es sei f eine konvexe Funktion über einer konvexen Menge S. Dann ist jedes relative Minimum von f ein globales Minimum.

Tip: berlegen Sie sich zuerst (mit Aufgabe 2), daß die Menge, in der f ihr Minimum annimmt, konvex ist. Dann lßt sich obige Aussage leicht durch einen Widerspruchsbeweis zeigen.

Aufgabe 63 (mdl.)

Whrend der Klausur zur Algorithmischen Mathematik schlendert der Assistent der Vorlesung irgendwann zwischen 9 und 13 Uhr durch den Hörsaal C des Hörsaalgebudes und kontrolliert die Personal- und Studentenausweise der Klausurteilnehmer. Nachdem er damit fertig ist, sagt er (der für sein phnomenales Gedchtnis bekannt ist! [Achtung: Satire!]): *„Schade! Niemand hat heute, also am 6.2.'99, Geburtstag. Aber mir ist aufgefallen, daß zwei von Ihnen am selben Tag Geburtstag feiern! So ein Zufall!"*

Hat er recht damit? Ist das wirklich so ein Zufall? (Konkretere Aufgabenstellung: *Wieviele Personen braucht man, damit die Wahrscheinlichkeit, daß zwei von Ihnen am selben Tag Geburtstag haben, mindestens* $1/2$ *betrgt?*)