Algorithmische Mathematik

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Wintersemester 98/99

Dozent: Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler

mit Dr. Th. Korb

Ramin Sahamie sahamie@informatik.uni-koeln.de

Thomas Riehn riehn@informatik.uni-koeln.de

2. Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie Satz 1.4.1 aus der Vorlesung (Rundung, absoluter Fehler, relativer Fehler).
Sei $k \in \mathbb{N}$, $B = 2k$, $t \in \mathbb{N}$ und $x = \sigma B^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \neq 0$. Dann gilt:

1. $Rd_t(x)$ hat eine Darstellung der Gestalt $x = \sigma B^{n'} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x'_{-i} B^{-i} \neq 0$.
2. der absolute Fehler ist beschränkt durch $|x - Rd_t(x)| \leq \frac{B^{n-t}}{2}$,
3. der relative Fehler ist beschränkt durch $\left|\frac{x - Rd_t(x)}{x}\right| \leq \frac{B^{1-t}}{2}$,
4. der relative Fehler bzgl. $Rd_t(x)$ ist beschränkt durch $\left|\frac{x - Rd_t(x)}{Rd_t(x)}\right| \leq \frac{B^{1-t}}{2}$

1. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
   - Für $x_{-t-1} < \frac{B}{2}$: $n' := n \wedge x'_{-i} := x_{-i}$ mit $1 \leq i \leq t$
   - Für $x_{-t-1} > \frac{B}{2}$: x_{-i} mit $1 \leq i \leq t$: $x_i < B - 1 \Rightarrow \exists x_{-i}$ mit $n' := n \wedge x'_{-i} = x_{i-}$ für $1 \leq i \leq l - 1$ mit $l := max\{i \in \{1, \ldots, t\} \mid x_{-i} < B - 1\}$

   Oder: $x_{-t-1} \geq \frac{B}{2}$: $Rd_t(x) = \sigma B^{n'} \cdot \sum_{i=1}^{t} x'_{-i} B^{-i}$ mit $n' = n$, $x'_{-i} = x_{-i} \forall i \in \{1, \ldots, t-1\}$, $x'_{-t} = x_{-t} + 1$
2. Fall (1):

$$
\begin{aligned}
|x - Rd_t(x)| &= \left|\sigma B^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} - \sigma B^n \cdot \sum_{i=1}^{t} x_{-i} B^{-1}\right| \\
&= \left|\sigma B^n \cdot \sum_{i=t+1}^{\infty} x_{-i} B^{-i}\right| \\
&= B^n \cdot \sum_{i=t+1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\
&\leq B^n \cdot \underbrace{x_{-(t+1)}}_{\text{maximal } \frac{B}{2}} \cdot B^{-(t+1)} \\
&\leq B^n \cdot \frac{B}{2} \cdot B^{-(t+1)} = \frac{B^{n-t}}{2}
\end{aligned}
$$

Zum Satz:

Zu zeigen: $\forall\, c \in \mathbb{R}$: $\Gamma_c := \{x \in S \mid f(x) \leq c\}$ sei konvex. Seien $x, y \in \Gamma_c$ beliebig und $\lambda \in [0,1] \mapsto \lambda x + (1-\lambda) y$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \overset{konvex}{\leq} \lambda \underbrace{f(x)}_{\leq c} + (1-\lambda) \underbrace{f(y)}_{\leq c} \leq \lambda c + (1-\lambda) c = c$$

$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in \Gamma_c$

□

Zur "Annahme"

$\Gamma = \{x \mid f_i(x) \leq c_i, \forall\, i = 1, \ldots, m\}$. Seien $x, y \in \Gamma_c$ beliebig und $\lambda \in [0,1] \mapsto \lambda x + (1-\lambda) y$.

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \overset{konvex}{\leq} \lambda \underbrace{f_i(x)}_{\leq c_i} + (1-\lambda) \underbrace{f_i(y)}_{\leq c_i} \leq \lambda c_i + (1-\lambda) c_i = c_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Der Unterschied zu vorher besteht darin, daß es sich hier bei c_i um einen Vektor handelt und nicht mehr um eine Zahl.

□

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgendes klassisches Resultat über die Minimierung von konvexen Funktionen:
Es sei f eine konvexe Funktion über einen konvexen Menge S. Dann ist jedes relative Minimum von f ein globales Minimum.

Sei x ein lokales Minimum und man treffe die Annahme, es ist kein globales Minimum. Dann gibt es ein y mit $f(y) < f(x)$. Betrachte die Verbindungslinie zwischen x und y. Da S konvex ist, liegt diese ganz in S. Andererseits ist f eingeschränkt auf die Verbindungslinie konvex, also strikt unimodal nach *Proposition 5.1.12*, denn

$$f(x + \lambda(y-x)) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(x) = f(x) = \max\{f(y), f(x)\}$$

x ist aber auch ein lokales Minimum auf der Verbindungslinie (da diese ganz in S liegt) und somit ein globales Minimum auf der ganzen Linie, im Widerspruch zu $f(y) < f(x)$.

□

15. Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen, welche zeigen, daß die Kombination von *konvexen* Funktionen wieder *konvexe* Funktionen ergibt.

(a) Es seien f_1 und f_2 konvexe Funktionen definiert auf einer konvexen Menge S. Dann ist auch die Funktion $f_1 + f_2$ konvex auf S.

(b) Es sei f eine konvexe Funktion definiert auf einer konvexen Menge S. Dann ist auch $\alpha \cdot f$ konvex für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Zu (a)

Konvexe Funktionen besitzen per definitionem folgende Eigenschaft: $\forall\, x, y \in S,\ \forall\, \lambda \in [0,1]$

$$f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y) \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Für unseren Fall mit $i = 1$ und $i = 2$ bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) + \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y) \\ (f_1 + f_2)(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda (f_1 + f_2)(x) + (1-\lambda)(f_1 + f_2)(y) \end{aligned}$$

□

Zu (b)

Auch hier benutzt man die o.a. Definition der Konvexität:

$$\alpha f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \alpha(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)) \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Das α kann man hier ohne weiteres kürzen, da $\alpha > 0$ vorausgesetzt wurde, so daß kein Vorzeichenwechsel stattfindet.

□

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgenden Satz:
Es sei f eine konvexe Funktion auf einer konvexen Menge S. Dann gilt für jede reelle Zahl c, daß die Menge $\Gamma_c := \{x \in S \mid f(x) \leq x\}$ konvex ist.
Angenommen Sie haben nun konvexe Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ auf einer konvexen Menge S. Gilt dann auch, daß die Menge der Punkte x, welche

$$f_1(x) \leq c_1,\ f_2(x) \leq c_2, \ldots,\ f_m(x) \leq c_m \quad (c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R})$$

simultan erfüllen, konvex ist?

Fall (2): $x_{(-t-1)} \geq \frac{B}{2}$

$$\begin{aligned} |x - Rd_t(x)| &= B^{n-t} - B^n x_{-t-1} \cdot B^{-t-1} - B^n \cdot \sum_{i=t+2}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\ &= B^{n-t-1}(B - x_{-t-1}) - B^n \cdot \sum_{i=t+2}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\ &\leq \frac{B^{n-2}}{2} \end{aligned}$$

3. $\left|\frac{x - Rd_t(x)}{x}\right| \leq \frac{B^{1-t}}{2} \leq \frac{B^{n-t}}{2B^{n-1}} = \frac{B^{1-t}}{2}$

4. $\left|\frac{x - Rd_t(x)}{Rd_t(x)}\right| \leq \frac{B^{1-t}}{2} \leq \frac{B^{n-t}}{2B^{n-1}} = \frac{B^{1-t}}{2}$

Aufgabe 2

Rechnen mit kurzer Arithmetik.

(i) Berechnen Sie in 2-stelliger und in 3-stelliger Arithmetik zur Basis 10 den Ausdruck $x^3 \cdot 1000$ für x^{-3}.

(ii) Bekanntlich gilt: $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$. Berechnen Sie in 4-stelliger Arithmetik zur Basis 10 die Ausdrücke $sin(x)^2$ und $1 - cos(x)^2$ für $x = 10^{-2}$. Benutzen Sie dabei die Reihendarstellung von Sinus und Kosinus.

(iii) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Wie Sie wissen, gelten für die *quadratischen Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $|4ac| < b^2$ die Lösungsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b - sgn(b)\sqrt{b^2 - 4ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2a}(-b + sgn(b)\sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Wir betrachten nun den Fall: $|4ac| \ll b^2$. Überlegen Sie sich warum hier bei der Berechnung von x_2 eine numerische Instabilität auftritt, wenn man mit kurzer Arithmetik arbeitet, wohingegen die Berechnung von x_1 relativ unproblematisch bleibt. Geben Sie eine andere Formel zur Berechnung von x_2 an, bei deren Auswertung der Fehler in der gleichen Größenordnung bleibt, wie bei der Berechnung von x_1. x_2 kann durch x_1 ausgedrückt werden.

(i) 2-stellige Arithmetik:

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.10	0	x
$\cdot$	.10	0	x
=	.01	0	x^2
=	.10	-1	
$\cdot$	.10	0	x
=	.01	-1	x^3
=	.10	-2	
$\cdot$	.10	4	1000
=	.01	2	
=	.10	1	Ergebnis

3-stellige Arithmetik:

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.100	0	x
$\cdot$	.100	0	x
=	.010	0	x^2
=	.100	-1	
$\cdot$	.100	0	x
=	.010	-1	x^3
=	.100	-2	
$\cdot$	.100	4	1000
=	.010	2	
=	.100	1	Ergebnis

(ii) Reihendarstellung von Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned} sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

$sin(x)^2$:

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.1000	-2	x
$-$	.1660	-6	$\frac{x^2}{2}$
	.1000 0000	-2	
$-$	.0000 1666	-2	
=	.0999 8334	-2	
=	.9998 3340	-3	
$\approx$	.9998	-3	$sin(x)$
	.9998	-3	
$\cdot$	.9998	-3	
=	.9996 0004	-6	
$\approx$	.9996	-6	$sin(x)^2$

$1 - cos(x)^2$:

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.1000	1	1
$-$	.5000	-4	$\frac{x^4}{2!}$
	.1000	1	
	.0000 0500	1	
=	.0999 9500	1	
$\approx$	.1000	1	$cos(x)$
	.1000	1	
$\cdot$	.1000	1	
=	.0100	2	
=	.1000	1	$cos(x)^2$
	.1000	1	1
$-$	.1000	1	$cos(x)^2$
=	.0000	1	$1 - cos(x)^2$

Aufgabe 3

Zur Wiederholung: Untersuchen Sie folgende Funktion auf Minima

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9,$$

indem Sie die notwendige bzw. hinreichende Bedingungen erster und zweiter Ordnung überprüfen. (Finden Sie sogar ein *globales* Minimum?)

Lösung

$$\nabla f(x,y,z) = (4x + y - 6,\ x + 2y + z - 7,\ y + 2z - 8)^T$$

Lösung durch ein Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{4} & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{4} & -\frac{34}{4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{5} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{5} \end{array}\right)$$

Also ist

$$x = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 3.4 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\begin{aligned} \nabla f(1.2, 1.2, 3.4) &= \begin{pmatrix} 4.8 + 1.2 - 6 \\ 1.2 + 2.4 + 3.4 - 7 \\ 1.2 + 6.8 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ D_1 &= 4 > 0 \\ D_2 &= 8 - 1 = 7 > 0 \\ D_3 &= 4 \cdot (4-1) - 1 \cdot 2 + 0 = 12 - 2 = 10 > 0 \end{aligned}$$

Aus den nach dem Hurwitz-Kriterium berechneten Hauptdeterminanten weiß man, daß die Matrix positiv definit ist, da alle Hauptdeterminanten > 0 sind. Der Funktionswert lautet:

$$f(1.2, 1.2, 3.4) = 2.88 + 1.44 + 1.44 + 4{,}08 + 11.56 - 7.2 - 8.4 - 27.2 + 9 = -12{,}4$$

so daß

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= \sum \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum \mu_j \nabla g_j(x^*) \\ 0 &= \sum \mu_i g_i(x^*)\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$\begin{aligned}-c_1 &= \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_m a_{m1} - \mu_1 \\ &\vdots \\ -c_n &= \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_m a_{mn} - \mu_n \\ 0 &= \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n\end{aligned}$$

Betrachtung des DP:

$$\begin{aligned}min \quad f'(y) &= -\sum b_i y_i \\ unter \quad g'(y) &= c^T - y^T A \leq 0\end{aligned}$$

Sei y^* relatives Minimum und regulär. Dann folgt

$$\exists \mu_1' + \ldots + \mu_m' \leq 0,$$

wobei $\nabla' f(y^*) = \underbrace{\sum \mu_j' \nabla g_j'(y^*)}_{=0}$.

$$\begin{aligned}(1.1) \quad b_1 &= -\mu_1' a_{11} - \ldots - \mu_m' a_{1n} \\ &\vdots \\ (1.2) \quad b_m &= -\mu_1' a_{m1} + \ldots + \mu_m' a_{mn} \\ (1.3) \quad 0 &= \mu_1' (c_1 - \sum a_{i1} y_i, \ldots, c_n - \sum a_{in} y_i)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ PP $\Rightarrow$ DP

Wähle $y_i = -\lambda_i, \forall\, i$

$$-c_j = -y_1 a_{1j} - \ldots - y_m a_{mj} - \mu_j, \quad \forall\, j$$

Aus (1.3) folgt: $\mu_1' \mu_1 + \ldots + \mu_n' \mu_n = 0$ Wähle $\mu_i' = -x_i$. Aus (1.1) und (1.2) folgt:

$$\begin{aligned}b_1 &= x_1 a_{11} + \ldots + x_n a_{1n} \\ &\vdots \\ b_m &= x_1 a_{m1} + \ldots + x_n a_{mn} \\ \Leftrightarrow Ax &= b\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt: $c^T x^* = y^{*T} b$

$$\begin{aligned}\sum c_i x_i &= \sum_{i=1} \Big(\mu_i - \sum \lambda_i a_{ji}\Big) x_i \\ &= \sum \underbrace{\mu_i x_i}_{=0} - \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} \lambda_i a_{ji}\right) x_i \\ &= -\sum_{j=1} \left(\sum_{i=1} a_{ji} x_i\right) \lambda_j\end{aligned}$$

Da $\lambda_j = -y_j$ folgt: $y^{*T} b$

$\Leftarrow$ analog

$\square$

(iii)

$$x_2 = \frac{1}{2a} \cdot \underbrace{(-b + \underbrace{sgn(b) \overbrace{\sqrt{b^2 - 4ac}}^{\approx b^2}}_{\approx |b|})}_{\approx 0}$$

Hier tritt durch numerische Instabilität der Fall der numerischen Auslöschung statt, wohingegen bei x_1 der Klammerausdruck $\approx -2b$ ergibt. Man kann das Problem aber dadurch umgehen, indem man x_2 durch x_1 ausdrückt und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a x_1 x_2\end{aligned}$$

Der folgende Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned}b &= a(x_1 + x_2) \\ \frac{b}{a} &= x_1 + x_2 \\ x_2 &= \frac{b}{a} - x_1\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Sie zahlen bie einer Bank ein Startkapital x_0 auf ein Konto ein. Die Bank verzinst dieses mit p % pro Jahr. Wieviel Geld x_n besitzen Sie nach n Jahren ? Lösen Sie die Formel auch nach x_0, p und n auf.

(b) Fall(a) mit jährlicher Zuzahlung einer festen Summe Z mit dem Ablauf des ersten Jahres.

(a) Die Formel mit ihren Umformungen lautet:

$$\begin{aligned}x_n &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ x_0 &= \frac{x_n}{(1 + \frac{p}{100})^n} \\ n &= \frac{\log x_n - \log x_0}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ p &= 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} - 1\right)\end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

$(n = 1):\quad x_1 = x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Es gelte $\forall n$, zu zeigen für $n + 1$:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+1} \\ &= x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ \frac{x_{n+1}}{(1 + \frac{p}{100})} &= x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ x_n &= x_n\end{aligned}$$

(b) Die Formel lautet:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + z_n \\ x_n &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ z_n &= \sum_{i=1}^{n-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i \end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Zu beweisen bleibt nur noch z_n, da Beweis x_n in Teil (a).

$(n = 1): \quad z_1 = \sum_{i=1}^{0} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i = 0$

Es gelte $\forall n$, zu zeigen für $n + 1$:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{(n+1)-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i + z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ &= z_n + z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ &= z_{n+1} \end{aligned}$$

14. Übung

Aufgabe 1

Betrachten Sie das quadratische Programm (Notation wie immer)

$$\begin{aligned} min \quad & \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \\ unter \quad & Ax = c \end{aligned}$$

und überlegen Sie sich, daß ein Punkt x^* genau dann ein *lokales Minimum* ist, wenn er auch ein *globales Minimum* ist.

Es genügt zu zeigen: f ist strikt konvex. Dafür wollen wir zeigen: $\nabla^2 f$ ist positiv definit.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x \\ \nabla f(x) &= \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i1} x_i - b_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} Q_{in} x_i - b_n \right) \end{aligned}$$

Dabei hat Q die folgende Form:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(x) = Q$ ist positiv definit $\Rightarrow$ f ist strikt konvex.

□

Aufgabe 2

Beweisen Sie nochmals die LP-Dualität, indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* verwenden.

$$\underbrace{\begin{array}{ll} max & c^T x \\ unter & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}}_{PP} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{ll} min & y^T b \\ unter & y^T A \geq c^T \end{array}}_{DP}$$

PP: (Im folgenden schon umgeform). Sei nun

$$\begin{aligned} min \quad f(x) &= -\sum c_i x_i \\ unter \quad h(x) &= Ax - b = 0 \\ g(x) &= -x \leq 0 \end{aligned}$$

Sei x^* relatives Minimum und regulär. Dann folgt aus der Kuhn-Tucker-Bedingung, daß

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \exists\, \mu_1, \ldots, \mu_n \leq 0,$$

Man erhält: $\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}$ und $\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{array}$.
Aber die Punkte $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right)$ sind nicht zulässig, denn

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} \neq 0$$

Also sind alle singulären Punkte auf S diejenigen der Form $(0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tangentialraumberechnung in $x^*(x,y,z) \in S \backslash \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$:

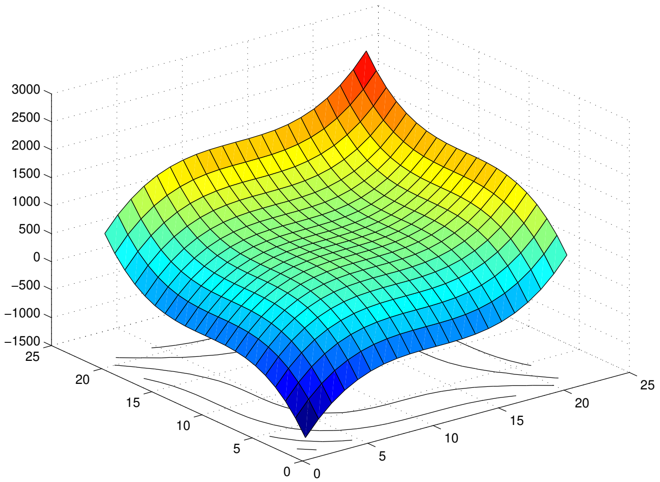
$$\nabla f(x^*) d = 0 \Leftrightarrow (y + 3x^2,\ x + 3y^2, 0) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = (y + 3x^2) d_1 + (x + 3y^2) d_2 = 0$$

Setze $d_1 =: s \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + 3y^2) d_2 = -(y + 3x^2) s \Rightarrow d_2 = -\frac{y+3x^2}{x+3y^2} \cdot s$. Setze $d_3 =: t \in \mathbb{R}$. Dann haben also alle Vektoren d auf T (nicht identisch mit T zuvor) die Form:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{y+3x^2}{x+3y^2} \cdot s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y+3x^2}{x+3y^2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialraum T an der Stelle $x^* = (x,y,z) \in S$ (regulär) ist schließlich:

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y+3x^2}{x+3y^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



3. Übung

Aufgabe 1

Die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 := a_2 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \ (n \geq 2),$$

definierten Zahlen werden *Fibonaccizahlen* genannt.

(a) Beweisen Sie folgendes Ergebnis:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbeginn:

$$n = 1: \quad a_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$n = 2: \quad a_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1-5+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Induktionsschritt: $n-1, n \to n+1$

Induktionsvoraussetzung:

$$a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$$

Induktionsbehauptung:

$$a_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right] \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

Es gilt nämlich:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Denn: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist Nullstelle von $x^2 - x - 1$:

$$\begin{array}{rcl|l} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} & = & \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 & \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & = & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \end{array}$$

Dieselbe Gleichung erfüllt auch $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Gesamtlaufzeit des euklidischen Algorithmus durch $4(\log_2(m) + 1)$ beschr¨ankt ist. Überlegen Sie sich, daß diese Schranke mit Hilfe der Fibonaccizahlen verbessert werden kann.

Erinnerung an Beweis aus der Vorlesung: betrachte die Folge $(m_1, m_2, \dots)$ und zeige $m_{i+2} \leq \frac{m_i}{2}$, verwende deshalb für die Abschätzung der Laufzeit 2-er Potenzen.

Versuche, m und n so zu wählen, daß man den für die Laufzeit schlechtesten Fall erhalte, wo der Eukl. Algor. am langsamsten ist. Das ist jedenfalls der Fall, wo der Rest r nicht so schnell 0 wird (r wird irgendwann 0), d.h. r sinkt sehr langsam. Dann wird r irgendwann 1.

Man betrachte außerdem, daß der Algorithmus am langsamsten abläuft, wenn die Quotienten $\left[\frac{m_i}{m_{i+1}}\right]$ am kleinsten, d.h. 1.

Folgendermaßen sieht die schlechteste Situation für den Algorithmus aus. Baue in diesem Fall die Division von unten auf:

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ (5q+3) & : & (3q+2) & = & 1 & R & (2q+1) \\ (3q+2) & : & (2q+1) & = & 1 & R & (q+1) \\ (2q+1) & : & (q+1) & = & 1 & R & q \\ (q+1) & : & q & = & 1 & R & 1 \end{array}$$

Noch langsamer geht es zu, wenn q möglichst klein ist, also $q = 2$ (für $q = 1$ ist der Rest bei der letzten Division sofort 0). Dann sieht es folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 13 & : & 8 & = & 1 & R & 5 \\ 8 & : & 5 & = & 1 & R & 3 \\ 5 & : & 3 & = & 1 & R & 2 \\ 3 & : & 2 & = & 1 & R & 1 \end{array}$$

Man erkennt, daß in diesem schlechtesten Fall, die $m_i - s$ genau die Fibonacci-Zahlen sind. Sei $(a_1, a_2, \dots)$ die Folge der Fibonacci-Zahlen.

$$a_{i-1} + a_i = a_{i+1} \Rightarrow \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} = 1 + \underbrace{\frac{a_i}{a_{i-1}}}_{\geq 1} \geq 2 \quad \forall i$$

Wähle nun $d_1 =: s$, $d_2 =: t \Rightarrow zd_3 = sx + ty$. $z \neq 0$, denn sonst würde wegen $x^2 + y^2 = z^2$ folgen, daß $x = y = z = 0$ (Widerspruch zur Regularität). Demnach kann man durch z dividieren und man erhält:

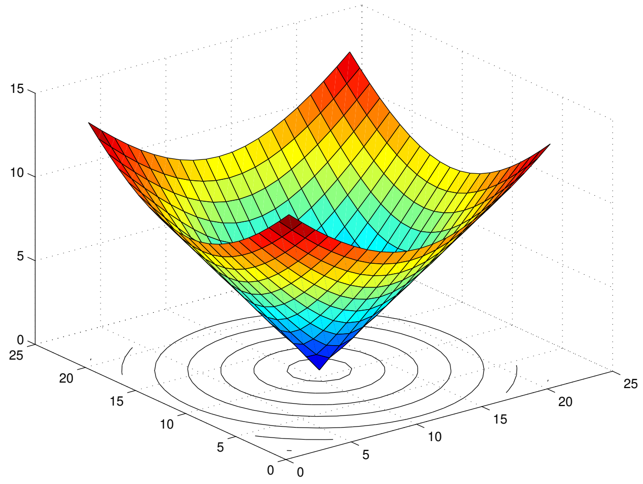
$$d_3 = s \cdot \frac{x}{z} + t \cdot \frac{y}{z}$$

Also haben alle Vektoren d auf T folgende Form, wobei $s, t \in \mathbb{R}$:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & & t \\ \frac{x}{z} \cdot s & + & \frac{y}{z} \cdot z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Tangentialraum im regulären Punkt $(x, y, z) \in S$:

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix} \right\rangle$$



Fläche: $xy + x^3 + y^3 = 0$

Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$, wobei $f(x, y, z) = xy + x^3 + y^3$:

$$\nabla f(x, y, z) = (y + 3x^2,\ x + 3y^2,\ 0)$$

$\nabla f(x, y) = 0$ ergibt schließlich die Kandidaten:

$$\begin{array}{rrcl} (I) & y + 3x^2 & = & 0 \\ (II) & x + 3y^2 & = & 0 \end{array}$$

Aus (II) folgt: $x = -3y^2$. Dies in (I) eingesetzt ergibt:

$$\begin{array}{rcl} y + 3(-3y)^2 & = & 0 \\ y(1 + 27y^3) & = & 0 \\ y = 0 \vee y & = & -\frac{1}{3} \end{array}$$

Setzt man nun x_2 in (I) ein, so erhält man für x_1

$$\begin{aligned} x_1^2 + (6-3x_1)^2 - 5 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x_1^2 + (36 - 36x_1 + 9x_1^2) - 5 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 10x_1^2 - 36x_1 + 31 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x_1^2 - 3{,}6x_1 + 3{,}1 = 0 \\ \Rightarrow \quad x_1 \quad & = \quad 1{,}8 \pm \sqrt{1{,}8^2 - 3{,}1} \\ & = \quad 1{,}8 \pm 0{,}37 \\ & \Rightarrow \quad x_1 = 2{,}17 \vee x_1 = 1{,}43 \\ \Rightarrow \quad x_2 \quad & = \quad 6 - 3 \cdot 2{,}17 = -0{,}51 \\ \vee \quad x_2 \quad & = \quad 6 - 3 \cdot 1{,}43 = 1{,}71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(2{,}17, -0{,}51) &= 4{,}7089 + 0{,}2601 - 5 = 0 \leq 0 \\ g_2(2{,}17, -0{,}51) &= 6{,}51 - 0{,}51 - 6 = 0 \leq 0 \\ g_1(1{,}43, 1{,}71) &= 2{,}0449 + 2{,}9241 - 5 = 0 \leq 0 \\ g_2(1{,}43, 1{,}71) &= 4{,}29 + 1{,}71 - 6 = 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Da in beiden Fällen beide Nebenbedingungen erfüllt worden sind, hat man zwei gültige Extremwerte gefunden.
Funktionswerte der gefundenene Extrema:

$$\begin{aligned} f(2{,}17, -0{,}51) &= 9{,}4178 - 2{,}2134 + 0{,}2601 - 21{,}7 + 5{,}1 = -9{,}1355 \\ f(1{,}43, 1{,}71) &= 4{,}0898 + 4{,}8906 + 2{,}9241 - 14{,}3 - 17{,}1 = -19{,}4955 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die beiden folgenden Flächen im $\mathbb{R}^3$:

(a) $x^2 + y^2 = z^2$

(b) $xy + x^3 + y^3 = 0$ (Kein Fehler, z kommt hier nicht vor!)

Skizzieren Sie die Flächen, bestimmen Sie ihre singulären Punkte (d.h. ihre *nicht* regulären Punkte) und geben Sie die Tangentialräume in den regulären Punkten der Fläche an.
Die 1. Fläche ist demnach durch folgende Funktion charakterisiert:
Sei $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$, wobei $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.
x^* regulärer Punkt von S, falls $\nabla h(x^*) = (2x, 2y, -2z) \neq (0,0,0)$ (ansonsten singulär), also ist der Ursprung der einzige singuläre Punkt auf S. Bestimmung des Tangentialraums in den regulären Punkten:
Sei $x^* = (x,y,z) \in S$ regulär, d.h. $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
Sei $T = ker(\nabla h(x^*)) = \{d \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla h(x^*) d = 0\}$. Aus $\nabla h(x^*) d = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 2(x, y, -z) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= 2xd_1 + 2yd_2 - 2zd_3 = 0 \\ 0 &= xd_1 + yd_2 - zd_3 \end{aligned}$$

Die Folge $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ von Fibonacci-Zahlen wächst schneller als die 2-er Potenzen.

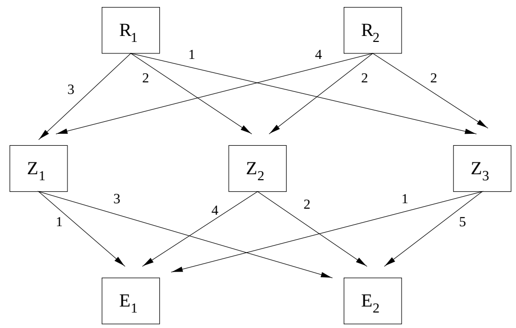
Aus diesem Gund und weil oben der schlechteste Fall für die Laufzeit betrachtet wurde, findet man mit den Fibonacci-Zahlen eine bessere Abschätzung der Laufzeit. Das geht folgendermaßen:

Suche die kleinste Fibonacci-Zahl a_k mit $a_k \geq m$, dann ist

$$\text{Laufzeit} \leq 4 \cdot \left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) \leq 4 \cdot (\log_2 m + 1)$$

Aufgabe 2

Der Materialverbrauch für die verschiedenen Produktionsstufen eines Betriebs wird durch folgendes Flußdiagramm wiedergegeben:



Aus dem Graphen lassen sich folgende Matrizen A, B ableiten:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 14 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 14 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5400 \\ 6800 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(mdl.)

Aufgabe 4

Beweisen Sie *Proposition 2.2.5* der Vorlesung (Transpositionsmatrizen sind selbstinvers; Charakterisierung von Permutationsmatrizen)

Lösung

Transpositionsmatrizen sind selbstinvers

$$
T_{ij} = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Zu zeigen: $T_{ij}^2 = E,\ \forall\, i, j$

T_{ij} Transpositionsmatrix $\Rightarrow T_{ij} e_k = \begin{cases} e_k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ e_i & \text{falls } k = j \\ e_j & \text{falls } k = i \end{cases}$

Zu zeigen: $T_{ij}^2 e_i = e_i,\ \forall i$. Für $k \notin i, j$:

$$
\begin{aligned}
T_{ij}^2 e_k &= T_{ij} \cdot (T_{ij} \cdot e_k) &&= T_{ij} \cdot e_k = e_k \\
T_{ij}^2 e_i &= T_{ij} \cdot T_{ij} \cdot e_i &&= e_i \\
T_{ij}^2 e_j &= T_{ij} \cdot T_{ij} \cdot e_j &&= e_j
\end{aligned}
$$

Eine andere Methode wäre, die *Bemerkung 2.2.4* zu benutzen: habe Matrix T_{ij} und multipliziere von rechts mit T_{ij} (laut Bemerkung heißt das Vertauschung der i-ten mit der j-ten Spalte) $\Rightarrow$ erhalte Einheitsmatrix $\Rightarrow T_{ij} \cdot T_{ij} = E$

Charakterisierung von Permutationsmatrizen

Zu zeigen: A Permutationsmatrix $\Leftrightarrow A \in \{0,1\}^n$,

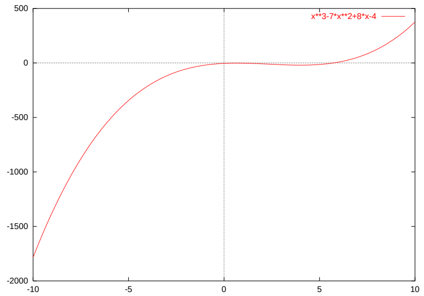
$$
\begin{aligned}
\forall\, l \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists j_1 \in \{1, \ldots, n\} \quad &\Rightarrow \quad A e_l = e_{j_1} \\
\exists j_2 \in \{1, \ldots, n\} \quad &\Rightarrow \quad e_l^T A = e_{j_2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ A Permutationsmatrix $\Rightarrow A$ Produkt von Transpositionsmatrix T_{ij} (*). Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig

$$
\begin{cases} T_{ij} e_l = e_{j_1} & \text{für irgendein } j_1 \in \{1, \ldots, n\} \\ e_l^T T_{ij} = e_{j_2} & \text{für irgendein } j_2 \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{1}
$$

Aus (*) und (1) folgt die Behauptung

$\Leftarrow$ Zu zeigen: A ist Permutationsmatrix. Man weiß, daß alle Spalten und Zeilen von A kano-



Am Graphen kann man wohl unschwer erkennen, daß für μ ein erstens positiver Wert und zweitens ein etwas schwer zu berechnender Wert sich ergibt. Somit bleibt nur $\mu = -1$ als Kandidat übrig, da $\mu \leq 0$ per definitionem gegeben ist. Für $\mu = -1$ erhält man

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-5 \cdot (-1)}{1 + 3 + 1} = 1 \\
x_2 &= \frac{5 + 5}{1 + 3 + 1} = 2
\end{aligned}
$$

den Punkt $(1, 2)$, der beide Nebenbedingungen erfüllt ! Dieser Kandidat entpuppt sich als globales Minimum nach den üblichen Überlegungen.
Ist die **zweite Nebenbedingung** aktiv, so gilt:

$$
\begin{aligned}
(I) \qquad & 4x_1 + 2x_2 - 10 = 3\mu \\
(II) \qquad & 2x_1 + 2x_2 - 10 = \mu
\end{aligned}
$$

Setzt man (II) in (I) ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
& 4x_1 + 2x_2 - 10 = 3 \cdot (2x_1 + 2x_2 - 10) \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_1 - 4x_2 - 20 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \quad (III)
\end{aligned}
$$

Löst man das durch (III) und der Nebenbedingung entstehende Gleichungssystem, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 6 \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -24 \end{array}\right) \\
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{24}{5} \end{array}\right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{24}{5} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

den möglichen Kandidaten $(\frac{2}{5}, \frac{24}{5})$. Wegen $g_1(\frac{2}{5}, \frac{24}{5}) = \frac{4}{25} + \frac{576}{25} - 5 \not\leq 0$ ist dieser aber nicht zulässig!

Sind **beide Nebenbedingungen** aktiv, so erhält man folgende Lösungen:

$$
\begin{aligned}
(I) \qquad & x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \\
(II) \qquad & 3x_1 + x_2 - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & x_2 = 6 - 3x_1
\end{aligned}
$$

Ist die **erste Nebenbedingung** aktiv, so gilt:

$$\begin{array}{rl} (I) & 4x_1 + 2x_2 - 10 = 2\mu x_1 \\ (II) & 2x_1 + 2x_2 - 10 = 2\mu x_2 \\ \Leftrightarrow & x_1 = \mu x_2 - x_2 + 5 = x_2(\mu - 1) + 5 \end{array}$$

Setzt man nun (II) in (I) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 4(\mu x_2 - x_2 + 5) + 2x_2 - 10 &= 2\mu(\mu x_2 - x_2 + 5) \\ 4\mu x_2 - 4x_2 + 20 + 2_x2 - 10 &= 2\mu^2 x_2 - 2\mu x_2 + 10\mu \\ 2\mu x_2 - x_2 + 5 &= \mu^2 x_2 - \mu x_2 + 5\mu \\ \mu^2 x_2 - 3\mu x_2 + x_2 + 5\mu - 5 &= 0 \\ x_2(\mu^2 - 3x\mu + 1) &= 5 \cdot (1 - \mu) \\ x_2 &= \frac{5 \cdot (1-\mu)}{\mu^2 - 3\mu + 1} \\ &= \frac{-5 \cdot (\mu - 1)}{\mu^2 - 3\mu + 1} \end{aligned}$$

x_2 in (II) eingesetzt ergibt:

$$x_1 = \frac{-5 \cdot (\mu - 1)^2}{\mu^2 - 3\mu + 1} + 5 = \frac{-5\mu}{\mu^2 - 3\mu + 1}$$

Für x_1 und x_2 gilt die folgende Restriktion:

$$\mu \neq \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Um ein gültiges μ zu finden, setzt man nun x_1 und x_2 in die aktive Nebenbedingung ein:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5 \cdot (1-\mu)}{\mu^2 - 3\mu + 1}\right)^2 + \left(\frac{-5\mu}{\mu^2 - 3\mu + 1}\right)^2 - 5 &= 0 \\ \frac{25 \cdot (1-\mu)^2}{(\mu^2 - 3\mu + 1)^2} + \frac{25\mu^2}{(\mu^2 - 3\mu + 1)^2} - 5 &= 0 \\ \frac{25 \cdot (1 - 2\mu + \mu^2) + 25\mu^2}{(\mu^2 - 3\mu + 1)^2} &= 5 \\ 25 - 50\mu + 50\mu^2 &= 5 \cdot (\mu^2 - 3\mu + 1)^2 \\ 5 - 10\mu + 10\mu^2 &= (\mu^2 - 3\mu + 1)^2 \\ 5 - 10\mu + 10\mu^2 &= \mu^4 - 6\mu^3 + 11\mu^2 - 6\mu + 1 \\ \mu^4 - 6\mu^3 + \mu^2 + 4\mu - 4 &= 0 \\ \mu = -1 \vee \mu^3 - 7\mu^2 + 8\mu - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Um weitere Kandidaten für μ zu finden, betrachten wir das Polynom $\mu^3 - 7\mu^2 + 8\mu - 4$:

nische Basisvektoren der $\mathbb{R}^n$ sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & & 1 \\ 1 & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen jetzt A in die Einheitsform überführen. Vertausche zuerst die 1. Spalte mit der Spalte, die e_1 enthält (falls nicht schon in der 1. Spalte e_1 steht). Diese Vertauschung ist nichts anderes als eine Rechtsmultiplikation mit einer Transpositionsmatrix $T_{ij(1)}$. Vertausche nun 2. Spalte mit der Spalte, die e_2 enthält (Rechtsmultiplikation mit einer Transpositionsmatrix $T_{ij(2)}$), ... Diese wird sortiert und nach höchstens $n-1$ Schritten erhält man die Einheitsmatrix E.

$$\begin{aligned} E &= A \cdot T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdots T_{ij(n-1)} \\ E \cdot T_{ij(n-1)}^{-1} &= A \cdot T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdots T_{ij(n-2)} \\ &\vdots \\ A &= E \cdot T_{ij(1)}^{-1} \cdots T_{ij(n-1)}^{-1} \\ &= T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdots T_{ij(n-1)} \end{aligned}$$

Letzter Schritt wegen erstem Teil der Proposition möglich (d.h. Transpositionsmatrix ist selbstinvers).

$\Rightarrow A$ Permutationsmatrix.

4. Übung

Aufgabe 1

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Führen Sie eine LU-Zerlegung durch und lösen Sie dann zur Kontrolle das Gleichungssystem mit Hilfe dieser Zerlegung.

Lösung

LU-Zerlegung anhand der erweiterten Koeffizientematrix: $PA = LU$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right)$$

Daraus kann man folgendes ableiten:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ c = \left(2, \frac{10}{3}, 4\right)^T$$

Es gilt $Ux = c$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 6 & 57 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

D.h.: $x = (19, -7, -8)^T$, Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57-7-48 \\ 38-7-24 \\ 19-7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(1,1,1,-2) &= 1+1-2=0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(1,1,1,-2) &= 1+1-2=0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(1,1,1,-2) &= 1+1-2=0 \\ h(1,1,1) &= 1+1+1-3=0 \end{aligned}$$

D.h. Ein Kandidat für ein Minimum liegt bei $x = (1,1,1)^T$.

Aufgabe 2

Finden Sie die Kandidaten für relative Minima des Problems

$$\begin{array}{rl} min & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ unter & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* überprüfen.

Hinweis: Achten Sie darauf, daß Sie verschiedene Kombinationen von *aktiven Bedingungen* annehmen können. Im vorliegenden Fall sind dies entweder keine, eine oder zwei Bedingungen.
Wir berechnen

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x_1,x_2) &= (4x_1 + 2_x2 - 10, 2x_1 + 2x_2 - 10) \\ \nabla g_1(x_1,x_2) &= (2x_1, 2x_2) \\ \nabla g_2(x_1,x_2) &= (3,1) \end{aligned}$$

Zunächst erfolgt die Überprüfung, wo der Gradient von f verschwindet:

$$\begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_1 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Der erste Kandidat lautet also $(0,5)$. Er ist jedoch ungültig, da

$$g_1(0,5) = 0 + 25 \not\leq 5$$

ist.

13. Übung

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{rl} min & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ unter & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{array}$$

und lösen Sie es unter Verwendung von *Lagrange-Multiplikatoren.*

Tip: Aus dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren erhalten Sie 3 Gleichungen. Zusammen mit der Bedingung der Optimierungsaufgabe ergibt sich dann ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen in 4 Unbekannten, welches es zu lösen gilt.
Mit Hilfe der *Lagrange'schen-Multiplikatoren* lassen sich folgende Extrema berechnen:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ h(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 - 3 \\ \Phi(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= f(x_1,x_2,x_3) + \lambda h(x_1,x_2,x_3) \\ &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= x_1 + x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,\lambda) &= x_2 + x_1 + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Aus den drei Ableitungen von Φ und $h = 0$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem mit der Lösung:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Aufgabe 2

[...] Es sei nun $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ die Verflechtungsmatrix einer sehr kleinen Volkswirtschaft, welche nur aus 2 Sektoren besteht. Für die nächste Planungsperiode wird ein Konsum von $y_1 = 10$ und $y_2 = 30$ geschätzt. Berechnen Sie, welche Produktion x_1, x_2 notwendig ist, um diesen Konsumbedarf zu decken.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{j=1}^{2} x_{1j} + y_1 = x_{11} + x_{12} + y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1 \\ x_2 &= \sum_{j=1}^{2} x_{2j} + y_2 = x_{21} + x_{22} + y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2 \\ x_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 10 \quad (I) \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 30 \quad (II) \end{aligned}$$

Lösungsweg (a)

$x_1 = \frac{2}{3}x_2 + 20$ in (II) eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + 20\right) + \frac{1}{3} + 30 \\ x_2 &= \frac{1}{6}x_2 + 5 + \frac{1}{3}x_2 + 30 \\ x_2 &= 70 \end{aligned}$$

In (I) eingesetzt: $x_1 = \frac{140}{3} + 20 = \frac{200}{3}$

Lösungsweg (b)

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & = & 20 \\ -\frac{1}{4}x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & = & 30 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 20 \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 30 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 20 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 35 \end{array}\right)$$

D.h.: $U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $c = (20, 35)^T$. Aus $Ux = c$ folgt:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{3} & 20 \\ 0 & \frac{1}{2} & 35 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{200}{3} \\ 0 & 1 & 70 \end{array}\right)$$

Aufgabe 3

Durch die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

wird eine *quadratische* Form $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diagonalisieren Sie A durch geeignete Koordinatentransformation, d.h. bringen Sie Φ auf eine Gestalt, in welcher nur noch rein quadratische Terme auftreten.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ symmetrisch, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2) \mapsto x^T \cdot A \cdot x = (x_1 x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\Phi(x) &= (x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= (ax_1 + bx_2 \ bx_1 + cx_2^2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= (ax_1 + bx_2)x_1 + (bx_1 + cx_2)x_2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \\
&\overset{a \neq 0}{=} a\left(x_1^2 + 2\frac{b}{a}x_1x_2 + \frac{c}{a}x_2^2\right) \\
&= a\left(x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{b}{a}x_2 + \left(\frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{c}{a}x_2^2 - \left(\frac{b}{a}x_2\right)^2\right) \\
&= a \cdot \left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + ax_2^2 \cdot \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right) \\
&= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Es heißt, man hat A "diagonalisiert" (durch die Koordinatentransformation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \left(x_1 + \frac{b}{a}x_2, x_2\right)$), weil man nun Φ folgendermaßen schreiben kann:

$$
\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{b}{a}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + \frac{b}{a}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

Damit erhält man die folgenden Lösungspaare: $\begin{array}{lcl} x_1 &=& 0 \\ x_2 &=& 0 \end{array} \vee \begin{array}{lcl} x_1 &=& 6 \\ x_2 &=& 9 \end{array}$.
Das Lösungspaar $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ ist nicht zulässig ist, da es auf dem Rand liegt.
Beim Lösungspaar $x_1 = 6,\ x_2 = 9$ erfolgt nun die Betrachtung der Hessematrix:

$$
det(\nabla^2 f(6,9)) = \underbrace{\begin{pmatrix} 36 - 18 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}}_{:=(*)} = 72 - 144 = -72
$$

$(*)$ ist indefinit, d.h. an der Stelle $(6, 9)$ liegt ein Sattelpunkt vor und kein Minimum.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Gleichung $x_1^2 + x_2 = 0$. Eine offensichtliche Lösung ist $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Gibt es eine Umgebung dieser Lösung, auf der eine Funktion Φ existiert mit $x_1 = \Phi(x_2)$? Wenn nicht, dann überlegen Sie sich, welche Voraussetzung des Satzes über implizit definierte Funktionen nicht erfüllt ist. Wie sieht es mit der Existenz eines solchen Φ für die anderen Lösungen dieser Gleichung aus?
$x_1^2 + x_2 = 0$. Definiere Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2$. Offensichtlich ist $f(0, 0) = 0$. Wollen Φ mit $\Phi(x_2) = x_1$.

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1
$$

Weil $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$, für $(x_1, x_2) = (0, 0)$, kann man den Satz über implizit definierte Funktionen nicht für $(0, 0)$ anwenden.
Für alle anderen Punkte, die die Gleichung $x_1^2 + x_2 = 0$, also $f(x_1, x_2) = 0$ erfüllen, (das sind die Punkte der Form $(x_1, -x_1^2)$ mit $x_1 \neq x_2$) gilt:

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \neq 0,
$$

da $x_1 \neq 0 \Rightarrow$ in diesen Fällen ist die Voraussatzung des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt.
Aus dem Satz folgt:
$\exists$ Umgebung $U \times V$ von einem solchen Punkt, mit $U \times V \subset \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\}$ und
$\exists$ stetige Abbildung $g : U \to V$ mit $f(g(x_2), x_2) = 0$
$f(g(x_2), x_2) = 0 \Leftrightarrow g(x_2)^2 + x_2 = 0$, aber $x_2 = -x_1^2 \Rightarrow g(x_2)^2 = x_1^2 \Rightarrow$ da g stetig:

$$
\begin{array}{ll}
g(x_2) = x_1 & \text{in diesem Fall wähle } \Phi := g \\
g(x_2) = -x_1 & \text{in diesem Fall wähle } \Phi := -g
\end{array}
$$

Wichtig:	**Der Satz über implizit definierte Funktionen sagt i.a. nur aus, daß es eine solche Funktion gibt und berechnet die "Ableitung"; die Funktion wird nicht explizit berechnet (daher auch der Name des Satzes). In dieser Aufgabe wurde auch nicht mehr als die Existenz von Φ verlangt.**

Minimum, $x_2^* = 0$. Wähle Vektor $d = \begin{pmatrix} 1-2x_1^* \\ 0 \end{pmatrix}$, offensichtlich $d_2 \geq 0$. Die Bedingung (a) bedeutet dann:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)d &= (2x_1^* - 1.x_1^* + 1) \cdot \begin{pmatrix} 1-2x_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{-\overbrace{(1-2x_1^*)^2}^{\geq 0}}_{\leq 0} \geq 0 \\ &\Rightarrow \; 1 - 2x_1^* = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ bleibt also der einzige Kandidat. Ist (b) für diesen Punkt erfüllt?

Die Vektoren d mit $\nabla f(x^*)d = 0 \Leftrightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_2 = 0$ sind diejenigen mit $d_2 = 0$. Für diese sollte gelten:

$$d^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d \geq 0$$

Aber $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $d^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d = (d_1 \; 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2d_1^2 \geq 0$ (stimmt!)

Also erfüllt $x^* = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ beide Bedingungen (a) und (b), so daß hier ein Minimum vorliegt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2 x_2 + 2x_2^2 \\ \text{unter} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

und überprüfen Sie, ob im Inneren des zulässigen Bereichs Lösungen existieren.
Für den Gradienten und die Hessematrix erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= (3x_1^2 - 2x_1x_2, \; -x_1^2 + 4x_2) \\ \nabla^2 f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun wird $\nabla f(x_1, x_2) = 0$ gesetzt, um mögliche “Kandidaten” zu erhalten.

$$\begin{array}{llll} (I) & 3x_1^2 - 2x_1x_2 & = & 0 \\ (II) & 4x_2 & = & x_1^2 \;\; \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 = 2x_2 \end{array}$$

Umformung aus (II) in (I) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 &= 0 \\ x_1^2\left(3 - \frac{1}{2}x_1\right) &= 0 \end{aligned}$$

5. Übung

Aufgabe 1

Für $x \in \mathbb{R}^n$ wurde in der Vorlesung folgende Notation eingeführt:

(i) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,

(ii) $||x||_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

(iii) $||x||_\infty := max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i|\}$.

Beweisen Sie, daß dies tatsächlich *Normen* sind.
Zur Erinnerung noch einmal die Normen:

(N1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$

(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

(i) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$

(N1) $\sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} = 0$, gdw. $\forall x_i : i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 0$

(N2) $||\alpha x||_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \cdot ||x||_1$

(N3) $||x + y||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1$

(*): Betrachten wir für diese Relation zunächst die zwei folgenden Fälle:

i. x_i und y_i haben dasselbe Vorzeichen: Hierbei gilt für $(*)$ die Gleichheit, denn $|a + b| = |a| + |b|$ für $sign(a) = sign(b)$.

ii. x_i und y_i haben unterschiedliche Vorzeichen: Wir können oBdA annehmen, daß y_i das negative Vorzeichen hat und somit den Term $|x_i + y_i|$ wie folgt umformen: $|x_i + y_i| = |x_i - |y_i||$. Da x_i vom Vorzeichen her sich von dem von y_i unterscheiden muß, ist $x_i = |x_i|$, woraus unmittelbar folgt: $|x_i + y_i| = ||x_i| - |y_i|| \leq |x_i| + |y_i|$.

(ii) $||x||_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(N1) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \underbrace{x_i^2}_{\geq 0}} = 0$, gdw. $\forall x_i : i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 0$

(N2) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \cdot ||x||_2$

(N3) $||x+y||_2 \leq ||x||_2+||y||_2$. Zur Lösung dieser Ungleichung ziehe man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zuhilfe, aus welcher man dann die Dreiecksungleichung und damit auch (N3) ableiten kann. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$< x, y > \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Die Gleichheit gilt nur, wenn x, y lineare abhängig sind.
Mit $< x, y >= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ bezeichnet man das "kanonische Skalarprodukt". Damit beweis man nun die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= < x+y, x+y > \\ &= < x, x > +2\cdot < x, y > + < y, y > \\ &= ||x||^2 + 2 \cdot ||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

Die Quadratwurzel ist monoton, also folgt (N3) im Prinzip schon.
Dies auf $||x||_2$ angewendet:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_iy_i + \sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

(iii) $||x||_\infty := max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$

(N1) $max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} = 0$, gdw. $\forall x_i : i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = 0$
(N2) $max_{1\leq i\leq n}\{|\alpha x_i|\} = |\alpha| max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} = |\alpha| \cdot ||x_\infty||$
(N3) $max_{1\leq i\leq n}\{|x_i+y_i|\} \leq max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\} + max_{1\leq i\leq n}\{|y_i|\}$

Aufgabe 2

Die Aufgabenstellung war falsch formuliert ! Zu zeigen war:

$$||x||_\infty \text{ist äquivalent zu jeder anderen Norm in } \mathbb{R}^n \ (\mathbb{C}^n)$$

D.h. $M = \{x \in \mathbb{C}^n \mid ||x||_\infty = 1\}$ ist kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt). Im $\mathbb{R}^2$ bedeutet dies:
$n_1(x)$ sei stetig auf M

12. Übung

Aufgabe 1

Untersuchen Sie nocheinmal Bsp 4.2.4 der Vorlesung, d.h. das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ \text{unter} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

im Hinblick auf die "Notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung" (Proposition 4.2.5).
Also $f : S \to \mathbb{R}$, wobei $S = \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$.
Gradient $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1-1+x_2,\ 1+x_1)$. Untersuchung im Inneren von S, d.h. auf $\mathbb{R}^{>0}\times\mathbb{R}^{>0}$:

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 1 + x_2 &=& 0 \\ x_1 + 1 &=& 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 &=& -1 \\ x_2 &=& 3 \end{array}$$

$(-1, 3) \notin S \Rightarrow$ im Inneren existieren keine Minima !
Randuntersuchung: $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$

1. Fall: $x_1 = 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = (x_2 - 1, 1)$. Die d-s mit der Eigenschaft

$$(*) \quad \exists\, \varepsilon > 0 : \ x^* + \alpha d \in S,\ \forall\, \alpha \in [0, \varepsilon]$$

aus der *Proposition 4.2.5* sind diejenigen $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $d_1 \geq 0$. Wenn x^* ein relatives Minimum von f in S sein soll, muß laut *Proposition 4.2.5* für diese Vektoren d gelten:

$$\begin{array}{ll} (a) & \nabla f(x^*)d \geq 0 \\ (b) & \text{Falls } \nabla f(x^*) = 0, \text{ dann } d^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d \geq 0 \end{array}$$

Betrachte $d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dieses d erfüllt Eigenschaft $(*)$, denn $d_1 = 0 \geq 0$. Aber $\nabla f(x^*)d = (x_2^*-1, 1)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \ngeq 0 \Rightarrow$ (a) nicht erfüllt, also findet man hier auch keine Minima.

Strategietip:	**Man wähle immer einen Vektor d, mit dem man eine der Bedingungen (a) und (b) zum Widerspruch führen kann, oder mit dem man sofort die Kandidaten für Minima sieht**

2. Fall: $x_2 = 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 1, x_1 + 1)$. Die Vektoren d, welche die Eigenschaft $(*)$ erfüllen, sind diesmal diejenigen mit $d_2 \geq 0$. Angenommen, $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ ist relatives

Aufgabe 3

Stellen Sie die Hessematrix der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf dem $\mathbb{R}^2$ auf.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

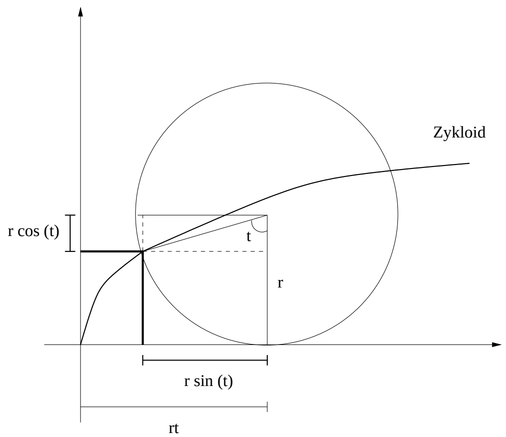
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 3y^2 - 3x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = -3$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = -3 \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 6y$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Geben Sie eine Parametrisierung für eine Zykloide an.



$$\begin{aligned} \text{1. Koordinate} &= rt - r \cdot \sin(t) \\ \text{2. Koordinate} &= r - r \cdot \cos(t) \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende Parametrisierung für $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} rt - r \cdot \sin(t) \\ r - r \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Satz vom Maximum und Minimum

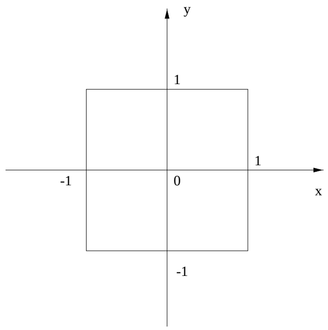
Jede stetige Abbildung besitzt auf einem Kompaktum ein Maximum und ein Minimum, d.h. $\exists\, k, K > 0 : \; k < n_1(x) < K, \; \forall x \in M$

$$\frac{x}{||x||_\infty} \in M \;\forall x \in \mathbb{C}^n \leftarrow \left|\left| \frac{x}{||x||_\infty} \right|\right| = \frac{1}{||x||_\infty}, \; ||x||_\infty$$

Also ist

$$\begin{array}{lclcl} k & < & n_1 \cdot \left(\frac{x}{||x||_\infty}\right) & < & K \\ k & < & \frac{x}{||x||_\infty} \cdot n_1(x) & < & K \\ k \cdot ||x||_\infty & < & n_1(x) & < & K \cdot ||x||_\infty \end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung.



Aufgabe 3

Welche der Matrizen ist *positiv definit*?

(a) Diese Matrix kann nicht positiv definit sein, da Diagonalelemente existieren, die < Null sind. Daher ist es nicht mehr nötig, die Eigenwerte zu betrachten. Diese Matrix ist *nicht* positiv definit.

(b) Sämtliche Diagonalelemente der Matrix sind positiv. Somit müssen wir noch die Eigenwerte der Matrix betrachten, um eine Aussage treffen zu können, ob die Matrix positiv definit ist:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda E) &= det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (6-\lambda)[(5-\lambda)(7-\lambda)] - (-2)[(-2)(7-\lambda)] + (2)[(5-\lambda)\cdot 2] \\ &= (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) + 4\lambda - 28 - 20 + 4\lambda \\ &= (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) + 8\lambda - 48 \\ &= (30 - 11\lambda + \lambda^2)(7-\lambda) + 8\lambda - 48 \\ &= (210 + 7\lambda^2 - 77\lambda - 30\lambda - \lambda^3 + 11\lambda^2) + 8\lambda - 48 \\ &= 162 + 18\lambda^2 - 99\lambda - \lambda^3 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat eine Nullstelle bei 3 ($\lambda_1 = 3$). Nach Polynomdivision und mittels Einsetzen in die PQ-Formel erhält man für die beiden anderen Nullstellen die Werte

$\lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Somit sind alle drei Eigenwerte positiv und es handelt sich bei A um eine positiv definite Matrix.

Es ist aber auch möglich über die Hauptdeterminanten zu argumentieren, da für die positive Definitheit alle n Determinanten einer $n \times n$-Matrix positiv sein müssen.

Außerdem ist die Matrix symmetrisch; dies ist auch eine Voraussetzung für eine Cholesky-Zerlegung. Ziel ist nämlich:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

Cholesky-Faktorisierung

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1. $A = LL^T$

   Benutzt man folgende Formeln zum Aufbau der L-Matrix

   $$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \qquad l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right)$$

   so erhält man:

   $$l_{11} = \sqrt{6}, \qquad l_{21} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2) = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \qquad l_{22} = \sqrt{5 - \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{3}},$$

   $$l_{31} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2-0) = \frac{2}{\sqrt{6}}, \qquad l_{32} = \sqrt{\frac{3}{13}} \left(0 - \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right) = \sqrt{\frac{4}{39}},$$

   $$l_{33} = \sqrt{7 - \frac{2}{3} - \frac{4}{39}} = \sqrt{\frac{273}{39} - \frac{26}{39} - \frac{4}{39}} = \sqrt{\frac{243}{39}} = \sqrt{\frac{81}{13}}$$

   $$A = LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{6}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} \end{pmatrix}$$

2. $Lc = b$

(b) Zu zeigen: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot g(x) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \cdot f(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot g(x) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \cdot f(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot g(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot f(x) = \nabla f(x) \cdot g(x) + \nabla g(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Zu (*): Man kann hier die Produktregel aus dem 1-dim verwenden.

(c) Zu zeigen: $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \alpha \nabla f(x) \end{aligned}$$

(d) Zu zeigen: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)}{g^2(x)} \\ \vdots \\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)}{g^2(x)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot g(x) - f(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\nabla f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \nabla g(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

□

11. Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Funktionen $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = x \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_2$$

Die gesuchten Funktionen haben die Form:

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + c$$

(c konstant)

Aufgabe 2

Die Funktion $f, g : S \subset R^n \to R$ (S offen) mögen in $x \in S$ Gradienten besitzen. Dann trifft dies auch für $f+g,\ fg,\ \alpha f$ ($\alpha \in R$) und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$) zu. Zeigen Sie nun, daß die folgenden Formeln gelten (wobei als Argument jeweils x zu ergänzen ist):

$$(a)\quad \nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \qquad (b)\quad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$(c)\quad \nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f \qquad (d)\quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

(a) Zu zeigen: $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(f+g)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \nabla f(x) + \nabla g(x) \end{aligned}$$

Zu (*): Beim Ableiten nach x_i können die Funktionen f und g als Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachtet werden und für diese ist bekannt, daß $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ gilt.

$$\left(\begin{array}{ccc|l} \sqrt{6} & 0 & 0 & 10 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 & 10 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} \sqrt{6} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 & 10 + \frac{10}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} & -5 - \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} & \left(-5 - \frac{10}{3}\right) - \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\sqrt{\frac{4}{39}} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{13}\sqrt{13} \end{array}\right)$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ -\frac{15}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

3. $L^T x = c$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} & -\frac{15}{13}\sqrt{13} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{6} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{6} + \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{13}{3} & 0 & \frac{40}{3} + \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Zu betrachten ist das lineare Gleichungssytem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pivotlement $= a_{11}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 0,00 & -199,00 & -99,00 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{array}\right)$$

Pivotelement $= a_{21}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 200,00 & 100,00 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,00 & 199,00 & 99,00 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1,00 & 0,00 & 0,50 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{array}\right)$$

Bemerkung: Eigentlich muß man die 199 nach 2-stelliger Arithmetik umrechnen:

$$199 = 10^3 \cdot 0,199 \approx 10^3 \cdot 0.20 = 200$$

Man erkennt, daß bei a_{11} als Pivotelement "numerische Auslöschung" stattfindet.

$$(i)\quad \begin{array}{ll} max & c^T x \\ unter & Ax = b \\ & u \le x \le o \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} max & c^T \cdot (x-u) \\ unter & A\overbrace{(x-u)}^{:=\tilde{x}} = b - Au \\ & 0 \le x - u \le \underbrace{o-u}_{:=\tilde{s}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} max & c^T \tilde{x} \\ unter & A\tilde{x} = \tilde{b} \\ & 0 \le \tilde{x} \le x \end{array}$$

Aufgabe 3

Redundanz in linearen Programmen. Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen in Standardform:

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \ge & 0 \end{array}$$

Folgende 3 Fälle von *Redundanz* können in diesem System auftreten:

1. *Redundante Gleichungen:* Eine der Gleichungen kann als Linearkombination der anderen ausgedrückt werden.

2. *Null-Variablen:* Für eine Variable x_i ist die Ungleichung $x_i \ge 0$ redundant (d.h. es ergibt sich schon aus den Gleichugnen, daß $x_i \ge a$ für ein $a > 0$ gelten muß).

   Beantworten Sie nun folgende Fragen:

   (a) Gibt es Null-Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} (I) & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \\ (II) & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & & & & x & \ge & 0 \end{array}$$

   $(I) - 2 \cdot (II): \quad x_2 + 2x_4 = 0 \Rightarrow$ da $x_2, x_4 \ge 0 : x_2 = x_4 = 0$ (Nullvariablen)

   (b) Gibt es nicht-extremale Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rrcrcrcl} (I) & x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ (II) & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & & & & x & \ge & 0 \end{array}$$

   $(II) - (I): \quad x_1 = \underbrace{\overbrace{2x_2 + x_3}^{\ge 0} + 2}_{\ge 2} \Rightarrow x_1$ ist nicht-extremale Variable ($a = 2$).

   (c) Wie kann man ein System von linearen Ungleichungen in Standardform, in welchem einer der obigen Fälle von Redundanz auftritt, vereinfachen? Wie sieht eine solche Vereinfachung für (a) und (b) aus?

   Für (a):

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 3$$

   Für (b):

$$\begin{array}{rcrcrcl} (x_1 - 2) & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 2(x_1 - 2) & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

10. Übung

Aufgabe 1

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe der Zweiphasenmethode:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \boxed{3} & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{5}{3} & -2 \\ \hline 0 & -3 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -4 \\ \hline 0 & -1 & \boxed{\frac{4}{3}} & 1 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -13 & 0 & 1 & -\frac{18}{3} & -14 \\ \hline 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & \boxed{5} & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & -13 & 0 & -14 \\ \hline 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & \boxed{5} & 0 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} \frac{42}{5} & 0 & 0 & -\frac{44}{5} \\ \hline \frac{3}{5} & 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} \frac{13}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \\ \hline \frac{3}{5} & 0 & 1 & \frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{array}$$

Damit ergeben sich die folgenden Lösungen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{5},\ x_3 = \frac{9}{5}, ZF = \frac{11}{5}$$

Aufgabe 2

[...] Also gelten üblicherweise folgende Einschränkungen für eine Variable x_i in einem LP:

$$u_i \leq x_i \leq o_i \qquad (u_i = \text{untere Schranke}, o_i = \text{obere Schranke})$$

Überlegen Sie sich, daß jedes lineare Programm mit unteren und oberen Schranken für die Variablen z.B. in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq s \end{array}$$

Überlegen Sie sich nun, wie die obige Form in die übliche Standardform überführt werden kann, auf welche dann das normale Simplexverfahren anwendbar ist. Wie groß wird die Matrix des so erhaltenen linearen Programms in Standardform?

6. Übung

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *orthogonale* Matrix. Zeigen Sie, daß gilt: $||A||_2 = 1$.
Bemerkung: Benutzen Sie bitte nur die Definitionen von $||\_||_2$ und orthogonale Matrizen. Weitere Ergebnisse sind nicht notwendig!
Es gilt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A orthogonal. Für orthogonale, quadratische Matrizen gilt:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E$$

Zu zeigen: $||A||_2 = 1$.
Per definitionem ist die Spektralnorm $||A||_2$ folgendermaßen definiert:

$$||A||_2 = max_{1\leq i\leq n}\left\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^T A\right\}$$

Zu zeigen bleibt:

$$max_{1\leq i\leq n}(\sqrt{\lambda}) = 1 \text{ mit } \lambda \text{ ist Eigenwert von } E = A^T \cdot A$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{rcl} det(\lambda E - E) & = & \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^n \\ (\lambda - 1)^n & = & 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{array}$$

Mit $\lambda = 1$ ist $max_{1\leq i\leq n}(\sqrt{\lambda})$ erfüllt und daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Aufgabe 2

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von *Satz 2.7.4* der Vorlesung (unter den dort angenommenen Voraussetzungen).
Seien x und $x + \Delta x$ Lösungen der Systeme $Ax = b$ bzw. $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$. Dann läßt sich der relative Fehler abschätzen durch:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{||\Delta A||}{||A||}} \cdot \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||}\right)$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$$

Nach Ausmultiplikation erhält man:

$$Ax + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x = b + \Delta b$$

Wegen $Ax = b$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= \Delta b - \Delta A x - \Delta A \Delta x \\ \Delta x &= -A^{-1}\left[-\Delta b + \Delta A x + \Delta A \Delta x\right] \end{aligned}$$

Für verträgliche Normen folgt daraus:

$$\begin{aligned} ||\Delta x|| &\leq ||A^{-1}|| \cdot || - \Delta b + \Delta A x + \Delta A \Delta x|| \\ &\leq ||A^{-1}|| \cdot [||\Delta b|| + ||\Delta A|| \cdot ||x|| + ||\Delta A|| \cdot ||\Delta x||] \end{aligned}$$

Dies kann man folgendermaßen umformen:

$$(*) \quad (1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||) \cdot ||\Delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot [||\Delta b|| + ||\Delta A|| \cdot ||x||]$$

Nach Voraussetzung gilt außerdem: $||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| < 1$.
Dann folgt aus $(*)$ die Abschätzung für die Norm des Fehlers Δx:

$$(**) \quad ||\Delta x|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot [||\Delta b|| + ||\Delta A|| \cdot ||x||]$$

Aus 2.7 in der Vorlesung und der Tatsache, daß $Ax = b$ folgt:

$$||b|| = ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \quad \text{bzw.} \quad ||x|| \geq \frac{||b||}{||A||}$$

Daraus und aus $(**)$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{||\Delta x||}{||x||} &\leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot \left[\frac{||\Delta b||}{||x||} + ||\Delta A||\right] \\ &\leq \frac{||A^{-1}|| \cdot ||A||}{1 - ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A||} \cdot \left[\frac{||\Delta b||}{||b||} + \frac{||\Delta A||}{||A||}\right] \end{aligned}$$

Mit $||A^{-1}|| \cdot ||\Delta A|| = \frac{cond(A) \cdot ||\Delta A||}{||A||} < 1$ erhält man schließlich:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{||\Delta A}{||A||}} \cdot \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||}\right)$$

□

Aufgabe 3

Modellbildung: Das Ende der Prohibition in Amerika stellte die Familie vor das Problem, das nun legale Alkoholgeschäft nach marktwirtschaftlichen Grundsätzen zu betreiben. Glücklicherweise hatte der Pate seinen Sohn in weiser Vorraussicht Wirtschaftsinformatik studieren lassen. Da es leider noch nicht viele Computer gab, war dieser natürlich arbeitslos, aber sein theoretisches Wissen konnte er nun sinnvoll in die Familiengeschäfte einbringen. Im Lagerhaus der Familie fand er neben den üblichen Mafiautensilien noch ca. 2000 Flaschen Whisky der Marke

Das Pivotelement ist x_{22}.

Endtableau:

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-ZF$
0	0	0	3	7	-16
0	0	1	-3	4	8
0	1	0	-1	1	2
1	0	0	0	-1	1

Die Optimallösung für x_1 ist 1 und für x_2 ist 2 mit

$$ZF(x_1, x_2) = 10 + 6 = 16 \; = -(-ZF).$$

Aufgabe 3

Wie im Skript versprochen wollen wir nun ein Beispiel für mögliches *Kreisen* (oder *Zykeln*) des Simplexverfahrens betrachten:

$$\begin{array}{llcccccccccccc} min & & & 2x_2 & & & + & 4x_4 & & & + & 4x_6 & & \\ unter & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & 6x_6 & = & 0 \\ & & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ & & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das zu $B = \{1, 2\}$ gehörige Tableau.

(b) Iterieren Sie (Simplexverfahren) unter der Verwendung der $Steilster-Anstieg-Regel$, bis Kreisen eintritt.

(c) Überlegen Sie sich, wie man das Kreisen verhindern kann.

Wurde aus der Bewertung herausgenommen, da Aufgabenstellung "falsch".

Schließlich muß man das maximale Matching finden, deshalb $max \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot x$. Man sucht nämlich nach den passenden Kanten, die das maximale Matching bilden.

Aufgabe 2

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe des Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{llcll} min & 10x_1 & + & 3x_2 & \\ unter & x_1 & - & 3x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq 3 \\ & x_1 & & & \geq 1 \\ & x_{1,2} & & & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ b &= (3,3,1)^T \\ c &= (10,3,0,0,0)^T \end{aligned}$$

Anfangstableau und Umformungsschritte:

	x_1	x_2	1	$\frac{x^0}{a_{i1}}$
y_1	-1	3	3	-3
y_2	-1	-1	3	-3
y_3	$\boxed{-1}$	0	1	-1
ZF	10	3	0	

$\rightarrow$

	y_3	x_2	1	$\frac{x^1}{a_{i2}}$
y_1	1	3	2	$\frac{2}{3}$
y_2	1	$\boxed{-1}$	2	-2
x_1	-1	0	1	
ZF	-10	3	10	

$\rightarrow$

	y_3	y_2	1
y_1	4	-3	8
x_2	1	-1	$\boxed{2}$
x_1	-1	0	$\boxed{1}$
ZF	7	-3	$\boxed{16}$

Damit ergeben sich die folgenden Lösungen für die Variablen und die Zielfunktion: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ ZF(x_1, x_2) = 16$

Hier der Lösungsweg nach der Vorlesung:

Ausgangstableau:

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-ZF$
10	3	0	0	0	0
1	-3	1	0	0	3
1	1	0	-1	0	3
1	0	0	0	-1	1

Das Pivotelement ist x_{31}.

1. Tableau:

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	$-ZF$
0	3	0	0	10	-10
0	-3	1	0	1	2
0	**1**	0	-1	1	2
1	0	0	0	-1	1

Winnfriddich, 2500 Flaschen Korbelschnaps und 1200 Flaschen 50-prozentigen Brennspiritus. Nach einer feuchtfröhlichen Marktanalyse sah der Sohn des Paten keine großen Absatzchancen für diese Originalprodukte. Daher beschloß er, durch Mischen die neuen Whiskysorten Winni Talker, Blonde Beauty und Simple produzieren zu lassen, welche zu 22.5 cts, 28.5 cts und 34 cts pro Flasche verkauft werden sollten. Als Wiederbeschaffungspreis für die Ausgangsprodukte Winnfridrich, Korbelschnaps und Brennspiritus konnte er 35 cts, 25 cts bzw. 20 cts pro Flasche ermitteln. Auf einigen Familienfeiern wurden durch exzessives Probieren folgende Vorgaben für die Mischungsverhältnisse festgelegt:

Winnie Talker	wenigstens	60% Winnfriddich
	höchstens	20% Brennspiritus
Blonde Beauty	wenigstens	15% Winnfriddich
	höchstens	60% Brennspiritus
Simple	höchstens	50% Brennspiritus

Absatzschwierigkeiten waren auf Grund der langjährigen guten Kontakte in der Alkoholbranche und einem familieneigenen Talent, Kunden mit handfesten Argumenten zu überzeugen, nicht zu befürchten. Wie sah das lineare Programm aus, das der Sohn des Paten für dieses Problem in Hinblick auf die Gewinnmaximierung (Erlös - Wiederbeschaffungspreis) ausfstellte?
x_{ij} = Anzahl Flaschen der Sorte i, die für die Herstellung von Sorte j benutzt werden.
Haben dann folgende Bedingungen:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & \leq & 2000 \\ x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \leq & 2500 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & \leq & 1200 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} 0,60 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) & \leq & x_{11} \\ 0.20 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) & \geq & x_{31} \\ 0,15 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) & \leq & x_{12} \\ 0,60 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) & \geq & x_{32} \\ 0,50 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33}) & \geq & x_{33} \end{array}\right.$$

Damit erhält man die folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned} Z(x) &= 22,5 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 28,5 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ &\quad +34,0 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 35,0 \cdot (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ &\quad -25,0 \cdot (x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 20,0 \cdot (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ &= -12,5x_{11} - 2,5x_{21} + 2,5x_{31} - 6,5x_{12} + 3,5x_{22} \\ &\quad +8,5x_{32} - x_{13} + 9x_{23} + 14x_{33} \end{aligned}$$

7. Übung

Aufgabe 1

Das Farkas´ Lemma der Vorlesung wird oft in folgender äquivalenter Formulierung angegeben:
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{array}{rl} \text{entweder} & \text{(i) } \exists\, x \in \mathbb{R}^n:\ Ax \le b, \\ \text{oder} & \text{(ii) } \exists\, u \in \mathbb{R}^m_+:\ u^T A = 0 \text{ und } u^T b < 0, \end{array}$$

aber nicht beides.
Leiten Sie diese Form dies Farkas´ Lemma aus der Ihnen bekannten her.
Diese Aufgabe wurde aus der Bewertung herausgenommen, da als zu schwer angesehen.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Aussage der *Übung 3.1.6* des Skriptes:
Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform ist ein Polyeder.
Laut *Definition 3.1.2* ist

$$\max c^T x \text{ unter } Ax = b, x \ge 0$$

ein Lineares Optimierungsproblem in Standardform. Ist $x \ge 0$ mit $Ax = b$, so sagen wir x ist zulässig für das Problem.
Ein Polyeder ist folgendermaßen definiert:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$$

Folgende "Aussagen" sind äquivalent:

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax \le b \wedge \underbrace{Ax \ge b}_{-Ax \le -b}$$

Zulässigkeit kann also wie folgt umschrieben und dann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \{x \mid Ax = b \wedge x \ge 0\} &= \{x \mid Ax \le b \wedge -Ax \le -b \wedge -E \cdot x \le 0\} \\ &= \left\{ x \mid \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ -A \\ E \end{pmatrix}}_{:=A'} \cdot x \le \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}}_{:=b'} \right\} \\ &= \{x \mid A'x \le b'\} \end{aligned}$$

Wie man sieht kann damit also auf ein Polyeder geschlossen werden. Daraus folgt die Behauptung.

□

9. Übung

Aufgabe 1

[...] Folgender Satz von König beschreibt maximales matching:

$$\max \# \text{ matching} = \min \# \text{ Überdeckung}$$

[...] Dies ist die Aussage des Satzes von König, welche Sie nun beweisen sollen! [...]

Sei A die Inzidenzmatrix des bipartiten Graphen. "Suche nach dem maximalen Matching" ist äquivalent zu folgendem LP:

$$\begin{array}{ll} max & x \cdot \left.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \right\} n \\ unter & Ax \le \left.\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} m \\ & x \ge 0 \end{array}$$

Die Maximallösung dieses Problems ist ein Vektor $x \in \{0,1\}^n$ (davon überzeugt man sich, indem man das Simplex-Tableau zu dem Problem aufstellt und Iterationen durchführt. Man sieht dann, daß auf der rechten Seite nur die Zahlen 0 und 1 auftauchen, daher diese Form des Optimalvektor !)
Warum gibt der Optimalvektor aber das maximale Matching an?
Dazu muß man zuerst untersuchen, was die Multiplikation der Inzidenzmatrix $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ mit einem Vektor $x \in \{0,1\}^n$ bewirkt. Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist genau der Summenvektor der 2-ten und 4-ten Spalten von A (liegt daran, daß die 2-te und 4-te Komponente von x 1 waren, die andern gleich 0).
Die 2 oben im Ergebnisvektor kommt dadurch zustande, daß der 2-te und 4-te Spaltenvektor von A (Kanten) 1 als erste Komponente hatten, d.h. sie sind beide mit dem ersten Knoten verbunden. Bei einem Matching soll aber genau dies nicht eintreffen. Zwei Kanten dürfen nie mit demselben Knoten verbunden sein (indizieren). Man muß also verhindern, daß 2 oder eine Zahl > 2 Komponente von Ax wird, daher die Einschränkung $Ax \le \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

oder Linearkombinationen anderer Zeilen vorkommen. In Aufgabe 3c wurde gesagt, daß die Unterdeterminanten einer Inzidenzmatrix nur den Wert 0,1 oder -1 haben. Beim Anwenden der Cramerschen Regel zur Lösung des Gleichungsssystems erkennt man dann, daß dieses auch wirklich nur ganzzahlig lösbar ist.

Aufgabe 3

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[p, q]$ die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$[p, q] := \{(1-\lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}$$

Wir sagen, eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei konvex, wenn mit je zwei Punkten $p, q \in K$ auch $[p, q] \subset K$ gilt. Beweisen Sie nun folgenden Satz: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sind $p_0, \ldots, p_k \in K$, so enthält K jede Konvexkombination $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k$.
$K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Zu zeigen: jede Konvexkombination von endlich vielen Punkten aus K ist auch $\in K$ (wobei wenn $p_0, \ldots, p_k \in K$, "Konvexkombination heißt ein Vektor der Form $\lambda_0 p_0 + \ldots \lambda_k p_k$, mit $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$). Beweis durch vollständige Induktion über k:
Induktionsanfang:

$k = 0$ D.h. in diesem Fall haben wir nur einen Vektor $p_0 \in K$. Die einzige Konvexkombination von einem einzigen Vektor ist der Vektor selbst (denn die Summe der Koeffizienten muß 1 sein, hier gibt es aber **nur einen** Koeffizienten, $\lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = 1$) und der ist in K.

$k = 1$ Offensichtlich ist $\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 \in K$, wenn $p_0, p_1 \in K$, $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ mit $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, denn K konvex.

Induktionsschritt: $k \to k+1$

Seien $p_0, \ldots p_{k+1} \in K$, $\lambda_0, \ldots \lambda_{k+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Zu zeigen: $p := \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_{k+1} p_{k+1} \in K$. Daraus folgt:

$$p = \lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k + \lambda_{k+1} p_{k+1} = \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \right) \cdot \frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} + \lambda_{k+1} p_{k+1}$$

p ist also eine Konvexkombination von 2 Punkten: $\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}$ und p_{k+1} (denn Summe der Koeffizienten $= \sum_{i=0}^k \lambda_i + \lambda_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i = 1$). Falls diese beiden Punkte $\in K$ wären, würde sofort folgen: $p \in K$, wegen der Definition der Konvexität (für K).
$p_{k+1} \in K$ ist klar (wegen Voraussetzung) und

$$\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \cdot p_0 + \ldots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \cdot p_k$$

ist Konvexkombination der Punkte $p_0, \ldots, p_k$, denn alle Koeffizienten ≥ 0 und ihre Summe ist:

$$\frac{\lambda_0}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} + \ldots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = 1$$

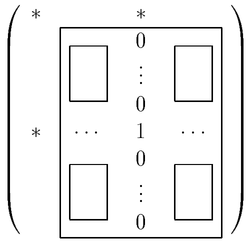
$p_0, \ldots, p_k \in K \Rightarrow$ wegen Induktionsvoraussetzung folt:

$$\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \in K \Rightarrow \text{Behauptung}$$

"Alternative" zu diesem Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i p_i + \lambda_k p_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i p_i + \lambda_k p_k \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j} \lambda_i p_i}_{:=p \text{ Konvexkomb. n. Ind.vorauss.}} + \frac{\lambda_k}{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot p_k \right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \left(p + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot p_k \right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j p + \lambda_k p_k}_{\in K \text{ Konvexkomb.}}
\end{aligned}$$

$\square$



3. Die Untermatrix besitzt in jeder Spalte genau zwei 1-en (mehr ist sowieso nicht möglich, da jede Kante nur 2 Knoten verbinden kann). Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Weil der Graph bipartit ist (d.h. es gibt 2 Partitionen), kann man leicht erkennen, daß die Summe der (linear unabhängigen) Zeilenvektoren, die zu den Knoten derselben Partition gehören, mit der Summe der Zeilenvektoren zu Knoten aus der anderen Partition übereinstummen, d.h.:

$$\sum \text{Zeilenvektoren einer Partition} = \sum \text{Zeilenvektoren anderer Partition}$$

Im obigen Beispiel bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei solchen Matrizen gibt es also eine nicht-triviale Linearkombination der Zeilenvektoren, so daß linear abhängige Partitionen entstehen $\Rightarrow$ $det = 0$.
Aus den drei Fällen folgt die Behauptung.

Aufgabe 4

Es sei A eine reguläre Matrix. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ und nehmen an, daß die Komponenten von b alle ganzzahlig sind. Zeigen Sie nun: Falls A die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist obiges Gleichungssystem ganzzahlig lösbar.

A sei also eine reguläre Matrix, d.h. $det(A) \neq 0$. Die Aussage der obigen Aufgabenstellung läßt sich mit Hilfe der *Cramerschen Regel* belegen. Es heißt nämlich:
Ist $det(A) \neq 0$, d.h. regulär, so kann die Lösung des inhomogenen Gleichungssystem explizit und eindeutig angegeben werden:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Mit D_j wird die Determinante bezeichnet, die aus D dadurch entsteht, daß die Elemente a_{ij} der j-ten Spalte von D durch die Absolutglieder b_j ersetzt werden. Der Fall $D = 0$ kann hier ausgeschlossen werden, da in der Inzidenzmatrix weder eine Nullzeile noch identische Zeilen

Unterdeterminanten ist hier wohl die Menge aller möglichen Kombinationen von Determinanten gemeint, die sich aus der Inzidenzmatrix bilden lassen. Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per definitionem haben die Unterdeterminanten damit folgende Eigenschaft: $a_{ij} : i,j \in \{0,1\}$, d.h. die Einträge der Unterdeterminanten können entweder nur 0 oder 1 sein.

Alle (1×1)-Unterdeterminanten können nur den Wert 0 oder 1 haben, da die Einträge der Unterdeterminanten ja auch nur Einträge 0 oder 1 haben, d.h. der Fall, daß eine Unterdeterminanten den Wert -1 hat, trifft also nur für den Fall von mindestens (2×2)-Unterdeterminanten auf.

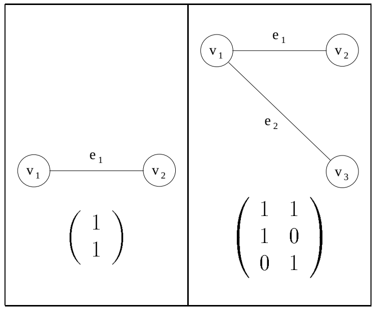
Generell gilt für das Nullwerden einer Determinante:

Eine Determinante ist gleich Null, wenn

1. eine Zeile aus lauter Nullen besteht,
2. zwei Zeilen einander gleich sind,
3. eine Zeile eine Linearkombination anderer Zeilen ist.

Beweis durch vollständige Induktion. **Induktionsbeginn:**

Betrachte die einfachsten Fälle und untersuche die Determinante:



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist offensichtlich, daß ihre Unterdeterminanten $\in \{0, \pm 1\}$.
Induktionsschritt:
Behauptung gelte für alle Unterdeterminanten $l \times l$ $(l \in \mathbb{N})$ und zeige sie auch für $(l+1) \times (l+1)$. Betrachte eine beliebige $(l+1) \times (l+1)$-Untermatrix einer Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen. Unterscheide drei Fälle:

1. Die Unterdeterminante besitzt eine Nullstelle $\Rightarrow det = 0$
2. Es gibt eine Spalte, wo nur eine 1 vorkommt. Dann ist

$$det\,(\text{Untermatrix}) = (\pm 1) \cdot \underbrace{det\,(\text{Unter-Untermatrix})}_{\in\{0,\pm 1\}\text{wg. Ind.vor.}} \in \{0, \pm 1\}$$

8. Übung

Aufgabe 1

Dualisieren Sie die beiden folgenden Programme. (Notation wie in der Vorlesung):

$$(a) \quad \begin{array}{r} max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad (b) \quad \begin{array}{r} min\ u^T b \\ u^T A \geq c^T \\ u \geq 0 \end{array}$$

Im folgenden sei $s :=$ Schlupfvektor.

Lösung zu (a):

$$\boxed{\begin{array}{l} max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} max\ \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \\ (A, E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}} \xrightarrow{\text{dualisiere}} \boxed{\begin{array}{l} min\ y^T b \\ y^T (A, E) \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^T \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} min\ y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0 \end{array}}$$

Lösung zu (b):

$$\boxed{\begin{array}{l} min\ u^T b \\ u^T A \geq c^T \\ u \geq 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} max\ -b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} max\ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \\ (A^T, -E) \cdot \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = c \\ \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{array}}$$

$$\xrightarrow{\text{dualisiere}} \boxed{\begin{array}{l} min\ y^T c \\ y^T (A^T, -E) \geq \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}^T \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} min\ y^T c \\ y^T A^T \geq -b^T \\ -y^T \geq 0 \end{array}}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} max\ (-y)^T c \\ (-y)^T A^T \leq b^T \\ -y^T \geq 0 \end{array}} \xrightarrow{x:=-y} \boxed{\begin{array}{l} max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

Jeder linearen Optimierungsaufgabe (primales Problem) läßt sich umkehrbar eindeutig ein zweites Optimierungsproblem (duales Problem) zuordnen:

Primales Problem — Duales Problem

$$\begin{array}{llcccl} \textbf{ZF:} & f(x) = c_1^T x_1 & + & c_2^T x_2 & = & max \\ \textbf{NB:} & A_{1,1} x_1 & + & A_{1,2} x_2 & \leq & b_1 \\ & A_{2,1} x_1 & + & A_{2,2} x_2 & = & b_2 \\ & x_1 \geq 0, & & x_2 \text{ frei} & & \end{array} \qquad \begin{array}{llcccl} \textbf{ZF*:} & g(u) = b_1^T u_1 & + & b_2^T u_2 & = & min \\ \textbf{NB:} & A_{1,1}^T u_1 & + & A_{2,1}^T u_2 & \geq & c_1 \\ & A_{1,2}^T u_1 & + & A_{2,2}^T u_2 & = & c_2 \\ & u_1 \geq 0, & & u_2 \text{ frei} & & \end{array}$$

Die Koeffizienten der Zielfunktion des einen Problems bilden die rechte Seite der Nebenbedingungen des anderen Problems. Jeder freien Variable entspricht eine Gleichungs- und jeder vorzeichenbeschränkten Variable eine Ungleichungsbedingung des jeweiligen anderen Problems.

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

(1) Das duale Programm des dualen Programms ist das primale Programm.

(2) Folgern Sie hieraus: Ist das primale Programm zulässig und beschränkt, so gibt es für beide Programme Optimallösungen x^* und y^* und es gilt: $c^T x^* = y^{*T}$.

Zu (1):
Zunächst: Überführung des dualen Programms in Standardform:

$$\begin{array}{c} min\ y^T b \\ y^T A \geq c^T \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} max\ -y^T b \\ y^T A - s^T = c^T \\ s \geq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} max\ -(y^{+T}, y^{-T}) \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ (y^{+T}, y^{-T}) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} - s^T = c^T \\ (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} max\ -(b^T, -b^T) \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} \\ (A^T, -A^T) \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} - s = c \\ (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} max\ -(b^T, -b^T, 0) \cdot \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} \\ (A^T, -A^T, -E) \cdot \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} = c \\ (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{array}\right\} \text{Standardform}$$

Nächster Schritt: Dualisieren des dualen Programms

$$\begin{array}{c} min\ x^T c \\ x^T(A^T, -A^T, -E) \geq (-b^T, b^T, 0) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} min\ x^T c \\ x^T A^T \geq -b^T \\ -x^T A^T \geq b^T \\ -x^T \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} -min\ x^T c \\ -Ax = b \\ -x \geq 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} max\ (-x)^T c \\ A(-x) = b \\ (-x) \geq 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} max\ c^T \tilde{x} \\ A\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

$$\text{Zu (2):} \quad \begin{array}{lll} (I) & x^* & \text{Optimum des primalen Programms} \\ (II) & y^* & \text{Optimum des dualen Programms} \\ (I') & y^{**} & \text{Optimum des dualen dualen Programms} \end{array}$$

$$\overbrace{c^T x^*}^{(I)} \leq \overbrace{y^{*T} b}^{(II)} \leq \overbrace{c^T y^{**}}^{(I')}$$

Demnach gilt: $(I) = (I') \Rightarrow c^T x^* = y^{*T} b$

Aufgabe 3

[...] Lösen Sie nun folgende Aufgaben:

(a) Stellen Sie in Inzidenzmatrix zu obigem Beispiel auf.

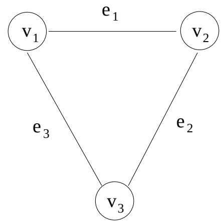
(b) Berechnen Sie die Determinante der Inzidenzmatrix eines Graphen mit 3 Knoten, welche durch alle Katen miteinander verbunden sind.

(c) Überlegen Sie sich, daß alle Unterdeterminanten der Inzidenzmatrix eines *bipartiten* Graphen den Wert 0, 1 oder -1 haben. (Solche Matrizen nennt man auch *total unimodular.*)

(a) Inzidenzmatrix:

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	1	0	1	0
v_2	1	1	0	1
v_3	0	1	0	0
v_4	0	0	1	0
v_5	0	0	0	1

(b) Gegeben sei folgender "Dreiecksgraph":



Inzidenzmatrix zum o.a. Graphen:

	e_1	e_2	e_3
v_1	1	0	1
v_2	1	1	0
v_3	0	1	1

$=: A$

Determinante der Inzidenzmatrix:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

(c) Es wird vorausgesetzt, daß die gebildeten Unterdeterminanten aus quadratischen Inzidenzmatrizen enstehen. Alle Unterdeterminanten sollen den Wert 0, 1 oder -1 haben. Mit