

---

# Algorithmische Mathematik

Lösungen zu den Übungsaufgaben

---

WINTERSEMESTER 98/99

DOZENT: PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER  
MIT DR. TH. KORB

RAMIN SAHAMIE   SAHAMIE@INFORMATIK.UNI-KOELN.DE  
THOMAS RIEHN   RIEHN@INFORMATIK.UNI-KOELN.DE

# Übung

## Aufgabe 1

weisen Sie Satz 1.4.1 aus der Vorlesung (Rundung, absoluter Fehler, relativer Fehler).

1.  $Rd_t(x)$  hat eine Darstellung der Gestalt  $x = \sigma B^{n'} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x'_i B^{-i} \neq 0$ . Dann gilt:
2. der absolute Fehler ist beschränkt durch  $|x \ominus Rd_t(x)| \leq \frac{B^{n-t}}{2}$ ,
3. der relative Fehler ist beschränkt durch  $\left| \frac{x - Rd_t(x)}{x} \right| \leq \frac{B^{1-t}}{2}$ ,
4. der relative Fehler bzgl.  $Rd_t(x)$  ist beschränkt durch  $\left| \frac{x - Rd_t(x)}{Rd_t(x)} \right| \leq \frac{B^{1-t}}{2}$ .

1. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Für  $x_{-t-1} < \frac{B}{2}$ :  $n' := n \wedge x'_i := x_{-i}$  mit  $1 \leq i \leq t$
- Für  $x_{-t-1} > \frac{B}{2}$ :  $x_{-i}$  mit  $1 \leq i \leq t$ :  $x_i < B \Leftrightarrow 1 \Rightarrow \exists x_{-i}$  mit  $n' := n \wedge x'_i = x_{i-}$  für  $1 \leq i \leq t \Leftrightarrow 1$  mit  $l := \max\{i \in \{1, \dots, t\} \mid x_{-i} < B \Leftrightarrow 1\}$

Oder:  $x_{-t-1} \geq \frac{B}{2}$ :  $Rd_t(x) = \sigma B^{n'} \cdot \sum_{i=1}^t x'_i B^{-i}$  mit  $n' = n$ ,  $x'_i = x_{-i} \forall i \in \{1, \dots, t \Leftrightarrow 1\}$ ,  $x'_{-i} = x_{-i} + 1$

2. Fall (1):

$$\begin{aligned}
 |x \ominus Rd_t(x)| &= \left| \sigma B^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \ominus \sigma B^n \cdot \sum_{i=1}^t x_{-i} B^{-i} \right| \\
 &= \left| \sigma B^n \cdot \sum_{i=t+1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \right| \\
 &= B^n \cdot \sum_{i=t+1}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\
 &\leq B^n \cdot \underbrace{x_{-(t+1)}}_{\text{maximal } \frac{B}{2}} \cdot B^{-(t+1)} \\
 &\leq B^n \cdot \frac{B}{2} \cdot B^{-(t+1)} = \frac{B^{n-t}}{2}
 \end{aligned}$$

## Zum Satz:

Zu zeigen:  $\forall c \in \mathbb{R} : , c := \{x \in S \mid f(x) \leq c\}$  sei konvex. Seien  $x, y \in , c$  beliebig und  $\lambda \in [0, 1] \mapsto \lambda x + (1 \ominus \lambda)y$

$$f(\lambda x + (1 \ominus \lambda)y) \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \underbrace{\lambda f(x)}_{\leq c} + (1 \ominus \lambda) \underbrace{f(y)}_{\leq c} \leq \lambda c + (1 \ominus \lambda)c = c$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 \ominus \lambda)y \in , c$$

□

## Zur “Annahme”

, =  $\{x \mid f_i(x) \leq c_i, \forall i = 1, \dots, m\}$ . Seien  $x, y \in , c$  beliebig und  $\lambda \in [0, 1] \mapsto \lambda x + (1 \ominus \lambda)y$ .

$$f_i(\lambda x + (1 \ominus \lambda)y) \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \underbrace{\lambda f_i(x)}_{\leq c_i} + (1 \ominus \lambda) \underbrace{f_i(y)}_{\leq c_i} \leq \lambda c_i + (1 \ominus \lambda)c_i = c_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Der Unterschied zu vorher besteht darin, daß es sich hier bei  $c_i$  um einen Vektor handelt und nicht mehr um eine Zahl.

□

## Aufgabe 3

Beweisen Sie folgendes klassisches Resultat über die Minimierung von konvexen Funktionen:

*Es sei  $f$  eine konvexe Funktion über einer konvexen Menge  $S$ . Dann ist jedes relative Minimum von  $f$  ein globales Minimum.*

Sei  $x$  ein lokales Minimum und man treffe die Annahme, es ist kein globales Minimum. Dann gibt es ein  $y$  mit  $f(y) < f(x)$ . Betrachte die Verbindungslinie zwischen  $x$  und  $y$ . Da  $S$  konvex ist, liegt diese ganz in  $S$ . Andererseits ist  $f$  eingeschränkt auf die Verbindungslinie konvex, also strikt unimodal nach Proposition 5.1.12, denn

$$f(x + \lambda(y \ominus x)) \leq (1 \ominus \lambda)f(x) + \lambda f(y) < (1 \ominus \lambda)f(x) + \lambda f(x) = \max\{f(y), f(x)\}$$

$x$  ist aber auch ein lokales Minimum auf der Verbindungslinie (da diese ganz in  $S$  liegt) und somit ein globales Minimum auf der ganzen Linie, im Widerspruch zu  $f(y) < f(x)$ .

□

# 15. Übung

## Aufgabe 1

Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen, welche zeigen, daß die Kombination von *konvexen* Funktionen wieder *konvexe* Funktionen ergibt.

- (a) Es seien  $f_1$  und  $f_2$  konvexe Funktionen definiert auf einer konvexen Menge  $S$ . Dann ist auch die Funktion  $f_1 + f_2$  konvex auf  $S$ .
- (b) Es sei  $f$  eine konvexe Funktion definiert auf einer konvexen Menge  $S$ . Dann ist auch  $\alpha \cdot f$  konvex für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

### Zu (a)

Konvexe Funktionen besitzen per definitionem folgende Eigenschaft:  $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Für unseren Fall mit  $i = 1$  und  $i = 2$  bedeutet dies:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x + (1 - \lambda)y) + f_2(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_1(y) + \lambda f_2(x) + (1 - \lambda)f_2(y) \\ (f_1 + f_2)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \lambda(f_1 + f_2)(x) + (1 - \lambda)(f_1 + f_2)(y) \end{aligned}$$

□

### Zu (b)

Auch hier benutzt man die o.a. Definition der Konvexität:

$$\alpha f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \alpha(\lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y)) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Das  $\alpha$  kann man hier ohne weiteres kürzen, da  $\alpha > 0$  vorausgesetzt wurde, so daß kein Vorzeichenwechsel stattfindet.

□

## Aufgabe 2

Zeigen Sie folgenden Satz:

*Es sei  $f$  eine konvexe Funktion auf einer konvexen Menge  $S$ . Dann gilt für jede reelle Zahl  $c$ , daß die Menge  $c := \{x \in S \mid f(x) \leq c\}$  konvex ist.*

Angenommen Sie haben nun konvexe Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  auf einer konvexen Menge  $S$ . Gilt dann auch, daß die Menge der Punkte  $x$ , welche

$$f_1(x) \leq c_1, f_2(x) \leq c_2, \dots, f_m(x) \leq c_m \quad (c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R})$$

simultan erfüllen, konvex ist?

Fall (2):  $x_{(-t-1)} \geq \frac{B}{2}$

$$\begin{aligned} |x \Leftrightarrow Rd_t(x)| &= B^{n-t} \Leftrightarrow B^n x_{-t-1} \cdot B^{-t-1} \Leftrightarrow B^n \cdot \sum_{i=t+2}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\ &= B^{n-t-1} (B \Leftrightarrow x_{-t-1}) \Leftrightarrow B^n \cdot \sum_{i=t+2}^{\infty} x_{-i} B^{-i} \\ &\leq \frac{B^{n-2}}{2} \end{aligned}$$

$$3. \left| \frac{x - Rd_t(x)}{x} \right| \leq \frac{B^{1-t}}{2} \leq \frac{B^{n-t}}{2B^{n-1}} = \frac{B^{1-t}}{2}$$

$$4. \left| \frac{x - Rd_t(x)}{Rd_t(x)} \right| \leq \frac{B^{1-t}}{2} \leq \frac{B^{n-t}}{2B^{n-1}} = \frac{B^{1-t}}{2}$$

## Aufgabe 2

Rechnen mit kurzer Arithmetik.

- (i) Berechnen Sie in 2-stelliger und in 3-stelliger Arithmetik zur Basis 10 den Ausdruck  $x^3 \cdot 1000$  für  $x^{-3}$ .
- (ii) Bekanntlich gilt:  $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ . Berechnen Sie in 4-stelliger Arithmetik zur Basis 10 die Ausdrücke  $\sin(x)^2$  und  $1 \Leftrightarrow \cos(x)^2$  für  $x = 10^{-2}$ . Benutzen Sie dabei die Reihendarstellung von Sinus und Kosinus.
- (iii) Es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ . Wie Sie wissen, gelten für die *quadratischen Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit  $|4ac| < b^2$  die Lösungsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2a} (\Leftrightarrow b \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(b) \sqrt{b^2 \Leftrightarrow 4ac}), \quad x_2 = \frac{1}{2a} (\Leftrightarrow b + \operatorname{sgn}(b) \sqrt{b^2 \Leftrightarrow 4ac}).$$

Wir betrachten nun den Fall:  $|4ac| \ll b^2$ . Überlegen Sie sich warum hier bei der Berechnung von  $x_2$  eine numerische Instabilität auftritt, wenn man mit kurzer Arithmetik arbeitet, wohingegen die Berechnung von  $x_1$  relativ unproblematisch bleibt. Geben Sie eine andere Formel zur Berechnung von  $x_2$  an, bei deren Auswertung der Fehler in der gleichen Größenordnung bleibt, wie bei der Berechnung von  $x_1$ .  $x_2$  kann durch  $x_1$  ausgedrückt werden.

(i) 2-stellige Arithmetik:

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
.	.10	0	$x$
.	.10	0	$x$
=	.01	0	$x^2$
=	.10	-1	
.	.10	0	$x$
=	.01	-1	$x^3$
=	.10	-2	
.	.10	4	1000
=	.01	2	
=	.10	1	Ergebnis

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.100	0	$x$
.	.100	0	$x$
=	.010	0	$x^2$
=	.100	-1	
.	.100	0	$x$
=	.010	-1	$x^3$
=	.100	-2	
.	.100	4	1000
=	.010	2	
=	.100	1	Ergebnis

j) Reihendarstellung von Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{x}{1!} \Leftrightarrow \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \Leftrightarrow \dots \\ \cos(x) &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \Leftrightarrow \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

$\sin(x)^2$ :

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.1000	-2	$x$
$\Leftrightarrow$	.1660	-6	$\frac{x^2}{2}$
	.1000	0000	-2
$\Leftrightarrow$	.0000	1666	-2
=	.0999	8334	-2
=	.9998	3340	-3
$\approx$	.9998	-3	$\sin(x)$
	.9998	-3	
.	.9998	-3	
=	.9996	0004	-6
$\approx$	.9996	-6	$\sin(x)^2$

$1 \Leftrightarrow \cos(x)^2$ :

Op.	Wert	Exp.	Ausdruck
	.1000	1	1
$\Leftrightarrow$	.5000	-4	$\frac{x^4}{2!}$
	.1000	1	
	.0000	0500	1
=	.0999	9500	1
$\approx$	.1000	1	$\cos(x)$
	.1000	1	
.	.1000	1	
=	.0100	2	
=	.1000	1	$\cos(x)^2$
	.1000	1	1
$\Leftrightarrow$	.1000	1	$\cos(x)^2$
=	.0000	1	$1 \Leftrightarrow \cos(x)^2$

### Aufgabe 3

**Zur Wiederholung:** Untersuchen Sie folgende Funktion auf Minima

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 \Leftrightarrow 6x \Leftrightarrow 7y \Leftrightarrow 8z + 9,$$

indem Sie die notwendige bzw. hinreichende Bedingungen erster und zweiter Ordnung überprüfen. (Finden Sie sogar ein *globales* Minimum?)

### Lösung

$$\nabla f(x, y, z) = (4x + y \Leftrightarrow 6, x + 2y + z \Leftrightarrow 7, y + 2z \Leftrightarrow 8)^T$$

Lösung durch ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{25}{6} \end{array} \right) \Leftrightarrow \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{34}{4} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Also ist

$$x = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\nabla f(1.2, 1.2, 3.4) = \begin{pmatrix} 4.8 + 1.2 \Leftrightarrow 6 \\ 1.2 + 2.4 + 3.4 \Leftrightarrow 7 \\ 1.2 + 6.8 \Leftrightarrow 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 4 > 0 \\ D_2 &= 8 \Leftrightarrow 1 = 7 > 0 \\ D_3 &= 4 \cdot (4 \Leftrightarrow 1) \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 0 = 12 \Leftrightarrow 2 = 10 > 0 \end{aligned}$$

Aus den nach dem Hurwitz-Kriterium berechneten Hauptdeterminanten weiß man, daß die Matrix positiv definit ist, da alle Hauptdeterminanten  $> 0$  sind. Der Funktionswert lautet:

$$f(1.2, 1.2, 3.4) = 2.88 + 1.44 + 1.44 + 4.08 + 11.56 \Leftrightarrow 7.2 \Leftrightarrow 8.4 \Leftrightarrow 27.2 + 9 = \Leftrightarrow 2.4$$

so daß

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) &= \sum \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum \mu_j \nabla g_j(x^*) \\ 0 &= \sum \mu_i g_i(x^*)\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow c_1 &= \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_m a_{m1} \Leftrightarrow \mu_1 \\ &\vdots \\ \Leftrightarrow c_n &= \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \Leftrightarrow \mu_n \\ 0 &= \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n\end{aligned}$$

Betrachtung des DP:

$$\begin{aligned}\min_{\text{unter } g'(y)} f'(y) &= \Leftrightarrow \sum b_i y_i \\ &= c^T \Leftrightarrow y^T A \leq 0\end{aligned}$$

Sei  $y^*$  relatives Minimum und regulär. Dann folgt

$$\exists \mu'_1 + \dots + \mu'_m \leq 0,$$

$$\text{wobei } \nabla' f(y^*) = \underbrace{\sum \mu'_j \nabla g'_j(y^*)}_{=0}.$$

$$(1.1) \quad b_1 = \Leftrightarrow \mu'_1 a_{11} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mu'_m a_{m1}$$

$\vdots$

$$(1.2) \quad b_m = \Leftrightarrow \mu'_1 a_{m1} + \dots + \mu'_m a_{mm}$$

$$(1.3) \quad 0 = \mu'_1 (a_1 \Leftrightarrow \sum a_{1i} y_i, \dots, a_n \Leftrightarrow \sum a_{ni} y_i)$$

$\Rightarrow$  PP  $\Rightarrow$  DP

Wähle  $y_i = \Leftrightarrow \lambda_i, \forall i$

$$\Leftrightarrow c_j = \Leftrightarrow y_1 a_{1j} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y_m a_{mj} \Leftrightarrow \mu_j, \quad \forall j$$

Aus (1.3) folgt:  $\mu'_1 \mu_1 + \dots + \mu'_m \mu_m = 0$  Wähle  $\mu'_i = \Leftrightarrow x_i$ . Aus (1.1) und (1.2) folgt:

$$\begin{aligned}b_1 &= x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n} \\ &\vdots \\ b_m &= x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn} \\ \Leftrightarrow Ax &= b\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt:  $c^T x^* = y^{*T} b$

$$\begin{aligned}\sum c_i x_i &= \sum_{i=1}^n \left( \mu_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ji} \right) x_i \\ &= \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) \lambda_j\end{aligned}$$

Da  $\lambda_j = \Leftrightarrow y_j$  folgt:  $y^{*T} b$

$\Leftarrow$  analog

□

(iii)

$$x_2 = \frac{1}{2a} \cdot \underbrace{(\Leftrightarrow b + \underbrace{sgn(b) \sqrt{b^2 \Leftrightarrow 4ac}}_{\approx b^2})}_{\approx |b|} \approx b$$

Hier tritt durch numerische Instabilität der Fall der numerischen Auslöschung statt, v. h. hingegeben bei  $x_1$  der Klammersdruck  $\approx \Leftrightarrow 2b$  ergibt. Man kann das Problem aber dadurch umgehen, indem man  $x_2$  durch  $x_1$  ausdrückt und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x \Leftrightarrow x_1)(x \Leftrightarrow x_2) \\ &= ax^2 \Leftrightarrow a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2\end{aligned}$$

Der folgende Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned}b &= a(x_1 + x_2) \\ \frac{b}{a} &= x_1 + x_2 \\ x_2 &= \frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

(a) Sie zahlen bei einer Bank ein Startkapital  $x_0$  auf ein Konto ein. Die Bank verzinst die mit  $p$  % pro Jahr. Wieviel Geld  $x_n$  besitzen Sie nach  $n$  Jahren ? Lösen Sie die Formel auch nach  $x_0$ ,  $p$  und  $n$  auf.

(b) Fall(a) mit jährlicher Zuzahlung einer festen Summe  $Z$  mit dem Ablauf des ersten Jahres (a) Die Formel mit ihren Umformungen lautet:

$$\begin{aligned}x_n &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ x_0 &= \frac{x_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} \\ n &= \frac{\log x_n \Leftrightarrow \log x_0}{\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ p &= 100 \cdot \left( \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} \Leftrightarrow 1 \right)\end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

$$(n = 1) : \quad x_1 = x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Es gelte  $\forall n$ , zu zeigen für  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+1} \\ &= x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ \frac{x_{n+1}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)} &= x_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ x_n &= x_n\end{aligned}$$

b) Die Formel lautet:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + z_n \\ x_n &= x_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ z_n &= \sum_{i=1}^{n-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i \end{aligned}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Zu beweisen bleibt nur noch  $z_n$ , da Beweis  $x_n$  in Teil (a).

$$(n = 1) : \quad z_1 = \sum_{i=1}^0 z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i = 0$$

Es gelte  $\forall n$ , zu zeigen für  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sum_{i=1}^{(n+1)-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^i + z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ &= z_n + z \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ &= z_{n+1} \end{aligned}$$

# 14. Übung

## Aufgabe 1

Betrachten Sie das quadratische Programm (Notation wie immer)

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} x^T Q x \Leftrightarrow b^T x \\ \text{unter} & Ax = c \end{array}$$

und überlegen Sie sich, daß ein Punkt  $x^*$  genau dann ein *lokales Minimum* ist, wenn er auch ein *globales Minimum* ist.

Es genügt zu zeigen:  $f$  ist strikt konvex. Dafür wollen wir zeigen:  $\nabla^2 f$  ist positiv definit.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} x^T Q x \Leftrightarrow b^T x \\ \nabla f(x) &= \left( \sum_{i=1}^n Q_{1i} x_i \Leftrightarrow b_1, \dots, \sum_{i=1}^n Q_{ni} x_i \Leftrightarrow b_n \right) \end{aligned}$$

Dabei hat  $Q$  die folgende Form:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = Q \text{ ist positiv definit} \Rightarrow f \text{ ist strikt konvex.}$$

□

## Aufgabe 2

Beweisen Sie nochmals die LP-Dualität, indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* verwenden.

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & y^T b \\ \text{unter} & y^T A \geq c^T \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{PP} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{DP}$

PP: (Im folgenden schon umgeformt). Sei nun

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = \Leftrightarrow \sum c_i x_i \\ \text{unter} & h(x) = Ax \Leftrightarrow b = 0 \\ & g(x) = \Leftrightarrow x \leq 0 \end{array}$$

Sei  $x^*$  relatives Minimum und regulär. Dann folgt aus der Kuhn-Tucker-Bedingung, daß

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \exists \mu_1, \dots, \mu_n \leq 0,$$

Man erhält:  $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$  und  $\begin{matrix} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{matrix}$ .  
Aber die Punkte  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z)$  sind nicht zulässig, denn

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z\right) = \frac{2}{27} + \frac{1}{9} \neq 0$$

Also sind alle singulären Punkte auf  $S$  diejenigen der Form  $(0, 0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Tangentialraumberechnung in  $x^*(x, y, z) \in S \setminus \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ :

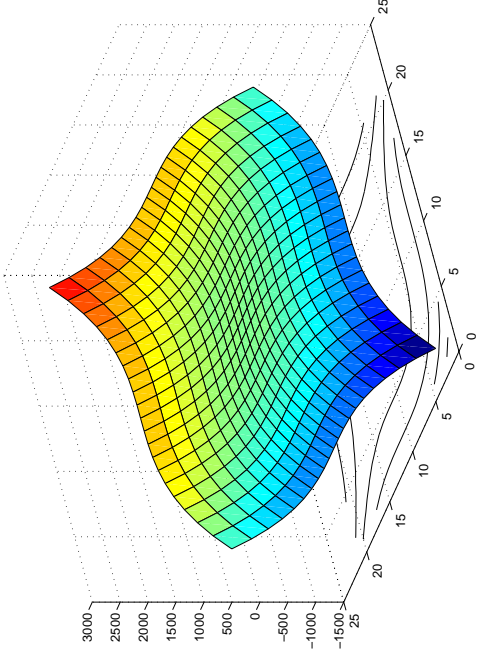
$$\nabla f(x^*)d = 0 \Leftrightarrow (y + 3x^2, x + 3y^2, 0) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = (y + 3x^2)d_1 + (x + 3y^2)d_2 = 0$$

Setze  $d_1 =: s \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + 3y^2)d_2 = \Leftrightarrow (y + 3x^2)s \Rightarrow d_2 = \Leftrightarrow \frac{y+3x^2}{x+3y^2} \cdot s$ . Setze  $d_3 =: t \in \mathbb{R}$ . Dann haben also alle Vektoren  $d$  auf  $T$  (nicht identisch mit  $T$  zuvor) die Form:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \Leftrightarrow \frac{y+3x^2}{x+3y^2} \cdot s \\ t \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \Leftrightarrow \frac{y+3x^2}{x+3y^2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialraum  $T$  an der Stelle  $x^* = (x, y, z) \in S$  (regulär) ist schließlich:

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \Leftrightarrow \frac{y+3x^2}{x+3y^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



## 3. Übung

### Aufgabe 1

Die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 := a_2 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

definierten Zahlen werden *Fibonaccizahlen* genannt.

(a) Beweisen Sie folgendes Ergebnis:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbeginn:

$$n = 1 : a_1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$n = 2 : a_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1-5+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Induktionsschritt:  $n \Leftrightarrow 1, n \rightarrow n+1$

Induktionsvoraussetzung:

$$a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Induktionsbehauptung:

$$a_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right] \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

Es gilt nämlich:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Denn:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ist Nullstelle von  $x^2 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Dieselbe Gleichung erfüllt auch  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Gesamtlauzeit des euklidischen Algorithmus durch  $4(\log_2(m) + 1)$  beschränkt ist. Überlegen Sie sich, daß diese Schranke mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen verbessert werden kann.

Erinnerung an Beweis aus der Vorlesung: betrachte die Folge  $(m_1, m_2, \dots)$  und zeige  $m_{i+2} \leq \frac{m_i}{2}$ , verwende deshalb für die Abschätzung der Laufzeit 2-er Potenzen.

Versuche,  $m$  und  $n$  so zu wählen, daß man den für die Laufzeit schlechtesten Fall erhalte, wo der Eukl. Algor. am langsamsten ist. Das ist jedenfalls der Fall, wo der Rest  $r$  nicht so schnell 0 wird ( $r$  wird irgendwann 0), d.h.  $r$  sinkt sehr langsam. Dann wird  $r$  irgendwann 1.

Man betrachte außerdem, daß der Algorithmus am langsamsten abläuft, wenn die Quotienten  $\left\lfloor \frac{m}{m+1} \right\rfloor$  am kleinsten, d.h. 1.

Folgendemaßen sieht die schlechteste Situation für den Algorithmus aus. Baue in diesem Fall die Division von unten auf:

$$\begin{array}{rcl} \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ (3q+3) : (3q+2) & = & 1 \quad R \quad (2q+1) \\ (3q+2) : (2q+1) & = & 1 \quad R \quad (q+1) \\ (2q+1) : (q+1) & = & 1 \quad R \quad q \\ (q+1) : q & = & 1 \quad R \quad 1 \end{array}$$

Noch langsamer geht es zu, wenn  $q$  möglichst klein ist, also  $q=2$  (für  $q=1$  ist der Rest bei der letzten Division sofort 0). Dann sieht es folgendemaßen aus:

$$\begin{array}{rcl} \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ 13 : 8 & = & 1 \quad R \quad 5 \\ 8 : 5 & = & 1 \quad R \quad 3 \\ 5 : 3 & = & 1 \quad R \quad 2 \\ 3 : 2 & = & 1 \quad R \quad 1 \end{array}$$

Man erkennt, daß in diesem schlechtesten Fall, die  $m_i \Leftrightarrow s$  genau die Fibonacci-Zahlen sind. Sei  $(a_1, a_2, \dots)$  die Folge der Fibonacci-Zahlen.

$$a_{i-1} + a_i = a_{i+1} \Rightarrow \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} = 1 + \underbrace{\frac{a_i}{a_{i-1}}}_{\geq 1} \geq 2 \quad \forall i$$

Wähle nun  $d_1 := s, d_2 := t \Rightarrow zd_3 = sr + ty, z \neq 0$ , denn sonst würde wegen  $x^2 + y^2 = z^2$  folgen, daß  $x = y = z = 0$  (Widerspruch zur Regularität). Demnach kann man durch  $z$  dividieren und man erhält:

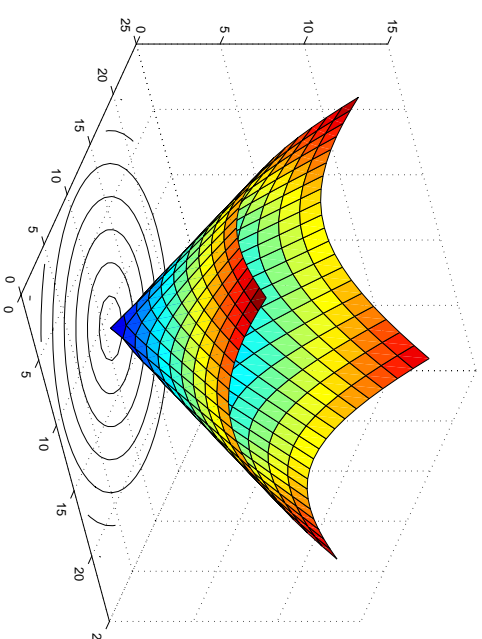
$$d_3 = s \cdot \frac{x}{z} + t \cdot \frac{y}{z}$$

Also haben alle Vektoren  $d$  auf  $T$  folgende Form, wobei  $s, t \in \mathbb{R}$ :

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{x}{z} \cdot s + \frac{y}{z} \cdot t \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Tangentialraum im regulären Punkt  $(x, y, z) \in S$ :

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{z} \end{pmatrix} \right\rangle$$



**Fläche:**  $xy + x^3 + y^3 = 0$

Sei  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ , wobei  $f(x, y, z) = xy + x^3 + y^3$ .

$$\nabla f(x, y, z) = (y + 3x^2, x + 3y^2, 0)$$

$\nabla f(x, y) = 0$  ergibt schließlich die Kandidaten:

$$\begin{array}{ll} (I) & y + 3x^2 = 0 \\ (II) & x + 3y^2 = 0 \end{array}$$

Aus (II) folgt:  $x = \Leftrightarrow 3y^2$ . Dies in (I) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} y + 3(\Leftrightarrow 3y^2)^2 &= 0 \\ y(1 + 27y^3) &= 0 \\ y = 0 \vee y &= \Leftrightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$



Setzt man nun  $x_2$  in  $(I)$  ein, so erhält man für  $x_1$

$$\begin{aligned} x_1^2 + (6 \Leftrightarrow 3x_1)^2 \Leftrightarrow 5 = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 + (36 \Leftrightarrow 36x_1 + 9x_1^2) \Leftrightarrow 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 10x_1^2 \Leftrightarrow 36x_1 + 31 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 \Leftrightarrow 3, 6x_1 + 3, 1 = 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 1, 8 \pm \sqrt{1, 8^2 \Leftrightarrow 3, 1} \\ &= 1, 8 \pm 0, 37 \\ &\Rightarrow x_1 = 2, 17 \vee x_1 = 1, 43 \\ \Rightarrow x_2 &= 6 \Leftrightarrow 3 \cdot 2, 17 = \Leftrightarrow 0, 51 \\ \vee x_2 &= 6 \Leftrightarrow 3 \cdot 1, 43 = 1, 71 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(2, 17, \Leftrightarrow 0, 51) &= 4, 7089 + 0, 2601 \Leftrightarrow 5 = 0 \leq 0 \\ g_2(2, 17, \Leftrightarrow 0, 51) &= 6, 51 \Leftrightarrow 0, 51 \Leftrightarrow 6 = 0 \leq 0 \\ g_1(1, 43, 1, 71) &= 2, 0449 + 2, 9241 \Leftrightarrow 5 = 0 \leq 0 \\ g_2(1, 43, 1, 71) &= 4, 29 + 1, 71 \Leftrightarrow 6 = 0 \leq 0 \end{aligned}$$

Da in beiden Fällen beide Nebenbedingungen erfüllt worden sind, hat man zwei gültige Extremwerte gefunden.

Funktionswerte der gefundenene Extrema:

$$\begin{aligned} f(2, 17, \Leftrightarrow 0, 51) &= 9, 4178 \Leftrightarrow 2, 2134 + 0, 2601 \Leftrightarrow 21, 7 + 5, 1 = \Leftrightarrow 9, 1355 \\ f(1, 43, 1, 71) &= 4, 0898 + 4, 8906 + 2, 9241 \Leftrightarrow 14, 3 \Leftrightarrow 17, 1 = \Leftrightarrow 19, 4955 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die beiden folgenden Flächen im  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $x^2 + y^2 = z^2$
- (b)  $xy + x^3 + y^3 = 0$  (Kein Fehler,  $z$  kommt hier nicht vor!)

Skizzieren Sie die Flächen, bestimmen Sie ihre singulären Punkte (d.h. ihre *nicht* regulären Punkte) und geben Sie die Tangentialräume in den regulären Punkten der Fläche an.

Die 1. Fläche ist demnach durch folgende Funktion charakterisiert:

$$\text{Sei } S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}, \text{ wobei } h(x, y, z) = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z^2.$$

$x^*$  regulärer Punkt von  $S$ , falls  $\nabla h(x^*) = (2x, 2y, \Leftrightarrow 2z) \neq (0, 0, 0)$  (ansonsten singulär), also ist der Ursprung der einzige singuläre Punkt auf  $S$ . Bestimmung des Tangentialraums in den regulären Punkten:

Sei  $x^* = (x, y, z) \in S$  regulär, d.h.  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

Sei  $T = \ker(\nabla h(x^*)) = \{d \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla h(x^*)d = 0\}$ . Aus  $\nabla h(x^*)d = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} 2(x, y, \Leftrightarrow z) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} &= 2xd_1 + 2yd_2 \Leftrightarrow 2zd_3 = 0 \\ 0 &= xd_1 + yd_2 \Leftrightarrow zd_3 \end{aligned}$$

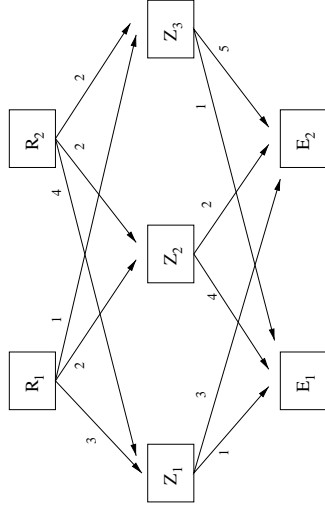
Die Folge  $(a_1, a_5, a_5, \dots)$  von Fibonacci-Zahlen wächst schneller als die 2-er Potenzen  
Aus diesem Gund und weil oben der schlechteste Fall für die Laufzeit betrachtet wurde  
findet man mit den Fibonacci-Zahlen eine bessere Abschätzung der Laufzeit. Das gilt  
folgendermaßen:

Suche die kleinste Fibonacci-Zahl  $a_k$  mit  $a_k \geq m$ , dann ist

$$\text{Laufzeit} \leq 4 \cdot \left( \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 \right) \leq 4 \cdot (\log_2 m + 1).$$

### Aufgabe 2

Der Materialverbrauch für die verschiedenen Produktionsstufen eines Betriebs wird durch folgendes Flußdiagramm wiedergegeben:



Aus dem Graphen lassen sich folgende Matrizen  $A, B$  ableiten:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 14 & 26 \end{pmatrix} \\ R_1 &= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 14 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5400 \\ 6800 \end{pmatrix} \\ R_2 &= \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 14 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5400 \\ 6800 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

(mdl.)

### Aufgabe 4

Beweisen Sie *Proposition 2.2.5* der Vorlesung (Transpositionsmatrizen sind selbstinvers; Charakterisierung von Permutationsmatrizen)

**gung**

anspositionsmatrizen sind selbstinvers

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & i & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & i \end{pmatrix}$$

zeigen:  $T_{ij}^2 = E, \forall i, j$

$$\text{Transpositionsmatrix} \Rightarrow T_{ij}e_k = \begin{cases} e_k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ e_i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

zeigen:  $T_{ij}^2 e_i = e_i$ ,  $\forall i$ . Für  $k \neq i, j$ :

$$\begin{aligned} T_{ij}^2 e_k &= T_{ij} \cdot (T_{ij} \cdot e_k) = T_{ij} \cdot e_k = e_k \\ T_{ij}^2 e_i &= T_{ij} \cdot T_{ij} \cdot e_i = e_i \\ T_{ij}^2 e_j &= T_{ij} \cdot T_{ij} \cdot e_j = e_j \end{aligned}$$

Die andere Methode wäre, die *Bemerkung 2.2/4* zu benutzen: habe Matrix  $T_{ij}$  und multipliziere es rechts mit  $T_{ij}^T$  (laut *Bemerkung* heißt das Vertauschung der  $i$ -ten mit der  $j$ -ten Spalte)  $\Rightarrow$  alte Einheitsmatrix  $\Rightarrow T_{ij}^T \cdot T_{ij} = E$

# Karakterisierung von Permutationsmatrizen

zeigen:  $A$  Permutationsmatrix  $\Leftrightarrow A \in \{0,1\}^n$ ,

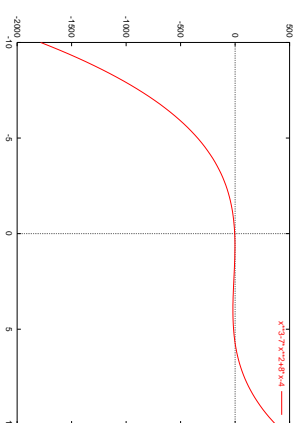
$$VI \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists j_i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow Ae_i = e_{j_i}$$

$\Rightarrow A$  Permutationsmatrix  $\Rightarrow A$  Produkt von Transpositionsmatrix  $T_{ij}^{(*)}$ . Sei  $l \in \{1, \dots, n\}$  beliebig

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_{ij}e_l = e_{j_l} & \text{für irgendein } j_l \in \{1, \dots, n\} \\ e_l^T T_{ij} = e_{j_l} & \text{für irgendein } j_l \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (1)$$

Aus (\*) und (1) folgt die Behauptung

$\Leftarrow$  Zu zeigen:  $A$  ist Permutationsmatrix. Man weiß, daß alle Spalten und Zeilen von  $A$  kanon-



Am Graphen kann man wohl unschwer erkennen, daß für  $\mu$  ein erstens positiver Wert und zweitens ein etwas schwer zu berechnender Wert sich ergibt. Somit bleibt nur  $\mu = \Leftrightarrow$  als Kandidat übrig, da  $\mu \leq 0$  per definitionem gegeben ist. Für  $\mu = \Leftrightarrow$  erhält man

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{45 \cdot (41)}{1+3+1} = 1 \\ x_2 &= \frac{5+5}{1+3+1} = 2 \end{aligned}$$

den Punkt (1, 2), der beide Nebenbedingungen erfüllt ! Dieser Kandidat entpuppt sich als globales Minimum nach den üblichen Überlegungen.

Ist die zweite Nebenbedingung aktiv, so gilt:

$$\begin{array}{ll} (I) & 4x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 = 3\mu \\ (II) & 2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 = \mu \end{array}$$

Setzt man  $(II)$  in  $(I)$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\Leftrightarrow 10 = 3 \cdot (2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10) \\ &\Leftrightarrow 2x_1 \Leftrightarrow 4x_2 \Leftrightarrow 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 = 0 \quad (III) \end{aligned}$$

Löst man das durch (III) und der Nebenbedingung entstehende Gleichungssystem, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

den möglichen Kandidaten  $(\frac{2}{3}, \frac{24}{5})$ . Wegen  $g_1(\frac{2}{3}, \frac{24}{5}) = \frac{4}{25} + \frac{576}{25} \not\Rightarrow 5 \nless 0$  ist dieser aber nicht zulässig!

Sind beide Nebenbedingungen aktiv, so erhält man folgende Lösungen:

$$\begin{array}{l} (I) \quad x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow 5 = 0 \\ (II) \quad 3x_1 + x_2 \Leftrightarrow 6 = 0 \\ \Leftrightarrow x_2 = 6 \Leftrightarrow 3x_1 \end{array}$$

Ist die **erste Nebenbedingung** aktiv, so gilt:

$$\begin{aligned} (I) \quad & 4x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 = 2\mu x_1 \\ (II) \quad & 2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 = 2\mu x_2 \\ \Leftrightarrow & x_1 = \mu x_2 \Leftrightarrow x_2 + 5 = x_2(\mu \Leftrightarrow 1) + 5 \end{aligned}$$

Setzt man nun (II) in (I) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 4(\mu x_2 \Leftrightarrow x_2 + 5) + 2x_2 \Leftrightarrow 10 &= 2\mu(\mu x_2 \Leftrightarrow x_2 + 5) \\ 4\mu x_2 \Leftrightarrow 4x_2 + 20 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 &= 2\mu^2 x_2 \Leftrightarrow 2\mu x_2 + 10\mu \\ 2\mu x_2 \Leftrightarrow x_2 + 5 &= \mu^2 x_2 \Leftrightarrow \mu x_2 + 5\mu \\ \mu^2 x_2 \Leftrightarrow 3\mu x_2 + x_2 + 5\mu \Leftrightarrow 5 &= 0 \\ x_2(\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1) &= 5 \cdot (1 \Leftrightarrow \mu) \\ x_2 &= \frac{5 \cdot (1 \Leftrightarrow \mu)}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1} \\ &= \frac{\Leftrightarrow 5 \cdot (\mu \Leftrightarrow 1)}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1} \end{aligned}$$

$x_2$  in (II) eingesetzt ergibt:

$$x_1 = \frac{\Leftrightarrow 5 \cdot (\mu \Leftrightarrow 1)^2}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1} + 5 = \frac{\Leftrightarrow 5\mu}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1}$$

Für  $x_1$  und  $x_2$  gilt die folgende Restriktion:

$$\mu \neq \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Um ein gültiges  $\mu$  zu finden, setzt man nun  $x_1$  und  $x_2$  in die aktive Nebenbedingung ein:

$$\begin{aligned} \left( \frac{5 \cdot (1 \Leftrightarrow \mu)}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1} \right)^2 + \left( \frac{\Leftrightarrow 5\mu}{\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1} \right)^2 \Leftrightarrow 5 &= 0 \\ \frac{25 \cdot (1 \Leftrightarrow \mu)^2}{(\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1)^2} + \frac{25\mu^2}{(\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1)^2} \Leftrightarrow 5 &= 0 \\ \frac{25 \cdot (1 \Leftrightarrow 2\mu + \mu^2) + 25\mu^2}{(\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1)^2} = 5 \\ 25 \Leftrightarrow 50\mu + 50\mu^2 &= 5 \cdot (\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1)^2 \\ 5 \Leftrightarrow 10\mu + 10\mu^2 &= (\mu^2 \Leftrightarrow 3\mu + 1)^2 \\ 5 \Leftrightarrow 10\mu + 10\mu^2 &= \mu^4 \Leftrightarrow 6\mu^3 + 11\mu^2 \Leftrightarrow 6\mu + 1 \\ \mu^4 \Leftrightarrow 6\mu^3 + \mu^2 + 4\mu \Leftrightarrow 4 &= 0 \\ \mu = \Leftrightarrow 1 \vee \mu^3 \Leftrightarrow 7\mu^2 + 8\mu \Leftrightarrow 4 &= 0 \end{aligned}$$

Um weitere Kandidaten für  $\mu$  zu finden, betrachten wir das Polynom  $\mu^3 \Leftrightarrow 7\mu^2 + 8\mu \Leftrightarrow 4$ :

nische Basisvektoren der  $\mathbb{R}^n$  sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & & 1 \\ 1 & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen jetzt  $A$  in die Einheitsform überführen. Vertausche zuerst die 1. Spalte mit der 2. Spalte, die  $e_1$  enthält (falls nicht schon in der 1. Spalte  $e_1$  steht). Diese Vertauschung nichts anderes als eine Rechtsmultiplikation mit einer Transpositionsmatrix  $T_{ij(1)}$ . Vertausche nun 2. Spalte mit der 3. Spalte, die  $e_2$  enthält (Rechtsmultiplikation mit einer Transpositionsmatrix  $T_{ij(2)}$ ), ... Diese wird sortiert und nach höchstens  $n \Leftrightarrow 1$  Schritten erhält man die Einheitsmatrix  $E$ .

$$\begin{aligned} E &= A \cdot T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdot \dots \cdot T_{ij(n-1)} \\ E \cdot T_{ij(n-1)}^{-1} &= A \cdot T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdot \dots \cdot T_{ij(n-2)} \\ &\vdots \\ A &= E \cdot T_{ij(1)}^{-1} \cdot \dots \cdot T_{ij(n-1)}^{-1} \\ &= T_{ij(1)} \cdot T_{ij(2)} \cdot \dots \cdot T_{ij(n-1)} \end{aligned}$$

Letzter Schritt wegen erstem Teil der Proposition möglich (d.h. Transpositionsmatrix selbstinvers).

$\Rightarrow A$  Permutationsmatrix.

# Übung.

## Aufgabe 1

trachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Nehmen Sie eine LU-Zerlegung durch und lösen Sie dann zur Kontrolle das Gleichungssystem mit Hilfe dieser Zerlegung.

gung

**1-Zerlegung anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix:**  $PA = LU$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Daraus kann man folgendes ableiten:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2, \frac{10}{3}, 4 \end{pmatrix}^T$$

$$\text{gilt } Ux = c$$

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 57 \\ 8 \\ \frac{28}{3} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$a.: x = (19, \Leftrightarrow 7, \Leftrightarrow 8)^T, \text{ Probe:}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ \Leftrightarrow 7 \\ \Leftrightarrow 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 48 \\ 38 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 24 \\ 19 \Leftrightarrow 7 \Leftrightarrow 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(1, 1, \Downarrow 2) &= 1 + 1 \Downarrow 2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(1, 1, \Downarrow 2) &= 1 + 1 \Downarrow 2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(1, 1, \Downarrow 2) &= 1 + 1 \Downarrow 2 = 0 \\ h(1, 1, 1) &= 1 + 1 + 1 \Downarrow 3 = 0 \end{aligned}$$

D.h. Ein Kandidat für ein Minimum liegt bei  $x = (1, 1, 1)^T$ .

## Aufgabe 2

Finden Sie die Kandidaten für relative Minima des Problems

$$\begin{array}{l} \min \\ \text{under} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 10x_1 \Leftrightarrow 10x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

indem Sie die *Kuhn-Tucker Bedingungen* überprüfen.

**Hinweis:** Achten Sie darauf, daß Sie verschiedene Kombinationen von *aktiven Bedingungen* annehmen können. Im vorliegenden Fall sind dies entweder keine, eine oder zwei Bedingungen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\nabla(f)(x_1, x_2) &= (4x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10, 2x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10) \\ \nabla g_1(x_1, x_2) &= (2x_1, 2x_2) \\ \nabla g_2(x_1, x_2) &= (3, 1)\end{aligned}$$

Zunächst erfolgt die "Überprüfung", wo der Gradient von  $f$  verschwindet:

$$\begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow 10 \\ 2x_1 + 2x_1 \Leftrightarrow 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & \not\leq 2 & \not\leq 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Der erste Kandidat lautet also  $(0, 5)$ . Er ist jedoch ungültig, da

$$g_1(0,5) = 0 + 25 \neq 5$$

ist.

# 13. Übung

## Aufgabe 1

Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ \text{unter} & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{array}$$

und lösen Sie es unter Verwendung von *Lagrange-Multiplikatoren*.

**Tip:** Aus dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren erhalten Sie 3 Gleichungen. Zusammen mit der Bedingung der Optimierungsaufgabe ergibt sich dann ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen in 4 Unbekannten, welches es zu lösen gilt.  
Mit Hilfe der *Lagrange-schen-Multiplikatoren* lassen sich folgende Extrema berechnen:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \\ h(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow 3 \\ \Phi(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= f(x_1, x_2, x_3) + \lambda h(x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 \Leftrightarrow 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= x_1 + x_3 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, \lambda) &= x_2 + x_1 + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Aus den drei Ableitungen von  $\Phi$  und  $h = 0$  ergibt sich folgendes Gleichungssystem mit der Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 \Leftrightarrow 1 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 3 \\ 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 1 & \Leftrightarrow 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 3 \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 2 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

[...] Es sei nun  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  die Verflechtungsmatrix einer sehr kleinen Volkswirtschaft, welche nur aus 2 Sektoren besteht. Für die nächste Planungsperiode wird ein Konsum von  $y_1 =$  und  $y_2 = 30$  geschätzt. Berechnen Sie, welche Produktion  $x_1, x_2$  notwendig ist, um den Konsumbedarf zu decken.

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{j=1}^2 x_{1j} + y_1 = x_{11} + x_{12} + y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1 \\ x_2 &= \sum_{j=1}^2 x_{2j} + y_2 = x_{21} + x_{22} + y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2 \\ x_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 10 \quad (I) \\ x_2 &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 30 \quad (II) \end{aligned}$$

### Lösungsweg (a)

$x_1 = \frac{2}{3}x_2 + 20$  in (II) eingesetzt:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} + 20 \right) + \frac{1}{3} + 30 \\ x_2 &= \frac{1}{6}x_2 + 5 + \frac{1}{3}x_2 + 30 \\ x_2 &= 70 \end{aligned}$$

In (I) eingesetzt:  $x_1 = \frac{140}{3} + 20 = \frac{200}{3}$

### Lösungsweg (b)

$$\begin{array}{lcl} x_1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x_2 = 20 & \rightarrow & \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & \Leftrightarrow \frac{2}{3} & 20 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1 & \frac{2}{3}x_2 & 30 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & \Leftrightarrow \frac{2}{3} & 20 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 35 \end{array} \right) \end{array}$$

D.h.:  $U = \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,  $c = (20, 35)^T$ . Aus  $Ux = c$  folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow \frac{2}{3} & 20 \\ 0 & \frac{1}{3} & 35 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{200}{3} \\ 0 & 1 & 70 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

Durch die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

wird eine *quadratische* Form  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Diagonalisieren Sie  $A$  durch geeignete Koordinatentransformation, d.h. bringen Sie  $\Phi$  auf eine Gestalt, in welcher nur noch quadratische Terme auftreten.

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ symmetrisch, } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ und } \Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } x = (x_1, x_2) \mapsto x^T \cdot A \cdot x = \\ x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (x_1 x_2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax_1 + bx_2)bx_1 + cx_2^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (ax_1 + bx_2)x_1 + (bx_1 + cx_2)x_2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \\ &\stackrel{a \neq 0}{=} a \left( x_1^2 + 2\frac{b}{a}x_1x_2 + \frac{c}{a}x_2^2 \right) \\ &= a \left( x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{b}{a}x_2 + \left( \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + \frac{c}{a}x_2^2 - \left( \frac{b}{a}x_2 \right)^2 \right) \\ &= a \cdot \left( x_1 + \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + ax_2^2 \cdot \left( \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} \right) \\ &= a \left( x_1 + \frac{b}{a}x_2 \right)^2 + \left( c \Leftrightarrow \frac{b^2}{a} \right) x_2^2 \end{aligned}$$

merkung: Es heißt, man hat  $A$  "diagonalisiert" (durch die Koordinatentransformation  $\mathbb{R}^2 \rightarrow (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \frac{b}{a}x_2, x_2)$ ), weil man nun  $\Phi$  folgendermaßen schreiben kann:

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{b}{a}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \Leftrightarrow \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + \frac{b}{a}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die folgenden Lösungspaare:  $x_1 = 0 \vee x_1 = 6$   
 $x_2 = 0 \vee x_2 = 9$ .

Das Lösungspaar  $x_1 = 0, x_2 = 0$  ist nicht zulässig ist, da es auf dem Rand liegt.  
 Beim Lösungspaar  $x_1 = 6, x_2 = 9$  erfolgt nun die Betrachtung der Hessematrix:

$$\det(\nabla^2 f(6, 9)) = \underbrace{\begin{pmatrix} 36 \Leftrightarrow 18 & \Leftrightarrow 12 \\ \Leftrightarrow 12 & 4 \end{pmatrix}}_{= (*)} = 72 \Leftrightarrow 144 = \Leftrightarrow 72$$

(\*) ist indefinit, d.h. an der Stelle (6, 9) liegt ein Sattelpunkt vor und kein Minimum.

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die Gleichung  $x_1^2 + x_2 = 0$ . Eine offensichtliche Lösung ist  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ .  
 Gibt es eine Umgebung dieser Lösung, auf der eine Funktion  $\Phi$  existiert mit  $x_1 = \Phi(x_2)$ ?

Wenn nicht, dann überlegen Sie sich, welche Voraussetzung des Satzes über implizit definierte Funktionen nicht erfüllt ist. Wie sieht es mit der Existenz eines solchen  $\Phi$  für die anderen Lösungen dieser Gleichung aus?

$x_1^2 + x_2 = 0$ . Definiere Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2$ . Offensichtlich ist  $f(0, 0) = 0$ .  
 Wollen  $\Phi$  mit  $\Phi(x_2) = x_1$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1$$

Weil  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$ , für  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , kann man den Satz über implizit definierte Funktionen nicht für  $(0, 0)$  anwenden.

Für alle anderen Punkte, die die Gleichung  $x_1^2 + x_2 = 0$ , also  $f(x_1, x_2) = 0$  erfüllen, (das sind die Punkte der Form  $(x_1, \Leftrightarrow x_1^2)$  mit  $x_1 \neq x_2$ ) gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \neq 0,$$

da  $x_1 \neq 0 \Rightarrow$  in diesen Fällen ist die Voraussetzung des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt.

Aus dem Satz folgt:

$\exists$  Umgebung  $U \times V$  von einem solchen Punkt, mit  $U \times V \subset \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 0\}$  und  
 $\exists$  stetige Abbildung  $g : U \rightarrow V$  mit  $f(g(x_2), x_2) = 0$

$f(g(x_2), x_2) = 0 \Leftrightarrow g(x_2)^2 + x_2 = 0$ , aber  $x_2 = \Leftrightarrow x_1^2 \Rightarrow g(x_2)^2 = x_1^2 \Rightarrow$  da  $g$  stetig:

$$\begin{aligned} g(x_2) &= x_1 && \text{in diesem Fall wähle } \Phi := g \\ g(x_2) &= \Leftrightarrow x_1 && \text{in diesem Fall wähle } \Phi := \Leftrightarrow g \end{aligned}$$

**Wichtig:** Der Satz über implizit definierte Funktionen sagt i.a. nur aus, daß es eine solche Funktion gibt und berechnet die "Ableitung"; die Funktion wird nicht explizit berechnet (daher auch der Name des Satzes). In dieser Aufgabe wurde auch nicht mehr als die Existenz von  $\Phi$  verlangt.

Minimum,  $x_2^* = 0$ . Wähle Vektor  $d = \begin{pmatrix} 1 \Leftrightarrow 2x_1^* \\ 0 \end{pmatrix}$ , offensichtlich  $d_2 \geq 0$ . Die Bedingung (a) bedeutet dann:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)d &= (2x_1^* \Leftrightarrow 1 \cdot x_1^* + 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \Leftrightarrow 2x_1^* \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\Leftrightarrow (1 \Leftrightarrow 2x_1^*)^2}_{\geq 0} \geq 0 \\ &\Rightarrow 1 \Leftrightarrow 2x_1^* = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Punkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  bleibt also der einzige Kandidat. Ist (b) für diesen Punkt erfüllt?

Die Vektoren  $d$  mit  $\nabla f(x^*)d = 0 \Leftrightarrow (0, \frac{3}{2}) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow d_2 = 0$  sind diejenigen mit  $d_2 = 0$ . Für diese sollte gelten:

$$d^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d \geq 0$$

Aber  $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $d^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot d = (d_1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2d_1^2 \geq 0$  (stimmt!)

Also erfüllt  $x^* = (\frac{1}{2}, 0)$  beide Bedingungen (a) und (b), so daß hier ein Minimum vorliegt.

## Aufgabe 2

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^3 \Leftrightarrow x_1^2 x_2 + 2x_2^2 \\ \text{unter} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

und überprüfen Sie, ob im Inneren des zulässigen Bereichs Lösungen existieren. Für den Gradienten und die Hessematrix erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= (3x_1^2 \Leftrightarrow 2x_1 x_2, \Leftrightarrow x_1^2 + 4x_2) \\ \nabla^2 f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 6x_1 \Leftrightarrow 2x_2 & \Leftrightarrow 2x_1 \\ \Leftrightarrow 2x_1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun wird  $\nabla f(x_1, x_2) = 0$  gesetzt, um mögliche "Kandidaten" zu erhalten.

$$\begin{aligned} (I) \quad & 3x_1^2 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 = 0 \\ (II) \quad & 4x_2 = x_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 = 2x_2 \end{aligned}$$

Umformung aus (II) in (I) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} 3x_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^3 &= 0 \\ x_1^2 \left( 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

## 5. Übung

### Aufgabe 1

Für  $x \in \mathbb{R}^n$  wurde in der Vorlesung folgende Notation eingeführt:

- (i)  $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ ,
- (ii)  $\|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,
- (iii)  $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$ .

Beweisen Sie, daß dies tatsächlich *Normen* sind. Zur Erinnerung noch einmal die Normen:

- (N1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (N2)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- (N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (i)  $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$

$$(N1) \quad \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|}_{\geq 0} = 0, \text{ gdw. } \forall x_i : i \in \{1, \dots, n\} : x_i = 0$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_1$$

$$(N3) \quad \|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

(\*): Betrachten wir für diese Relation zunächst die zwei folgenden Fälle:

- i.  $x_i$  und  $y_i$  haben dasselbe Vorzeichen: Hierbei gilt für  $(*)$  die Gleichheit, denn  $|a + b| = |a| + |b|$  für  $\text{sign}(a) = \text{sign}(b)$ .
- ii.  $x_i$  und  $y_i$  haben unterschiedliche Vorzeichen: Wir können oBdA annehmen, daß  $y_i$  das negative Vorzeichen hat und somit den Term  $|x_i + y_i|$  wie folgt umformen:  $|x_i + y_i| = |x_i \Leftrightarrow |y_i||$ . Da  $x_i$  vom Vorzeichen her sich von dem von  $y_i$  unterscheiden muß, ist  $x_i = |x_i|$ , woraus unmittelbar folgt:  $|x_i + y_i| = |x_i| \Leftrightarrow |y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ .

$$(ii) \quad \|x\|_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$(N1) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0, \text{ gdw. } \forall x_i : i \in \{1, \dots, n\} : x_i = 0$$

$$(N2) \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\alpha| \cdot \|x\|_2$$

(N3)  $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ . Zur Lösung dieser Ungleichung ziehe man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zuhilfe, aus welcher man dann die Dreiecksungleichung und damit auch (N3) ableiten kann. Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Die Gleichheit gilt nur, wenn  $x, y$  linear abhängig sind.

Mit  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  bezeichnet man das "kanonische Skalarprodukt". Damit beweist man nun die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Die Quadratwurzel ist monoton, also folgt (N3) im Prinzip schon. Dies auf  $\|x\|_2$  angewendet:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

(iii)  $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$

(N1)  $\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} = 0$ , gdw.  $\forall x_i : i \in \{1, \dots, n\} : x_i = 0$

(N2)  $\max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha x_i\} = |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty$

(N3)  $\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}$

## Aufgabe 2

Aufgabenstellung war falsch formuliert! Zu zeigen war:

$$\|x\|_\infty \text{ ist äquivalent zu jeder anderen Norm in } \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$$

1.  $M = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$  ist kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt). Im  $\mathbb{R}^2$  bedeutet dies:

(x) sei stetig auf  $M$

## 12. Übung

### Aufgabe 1

Untersuchen Sie nochmal Bsp 4.2.4 der Vorlesung, d.h. das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = x_1^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

im Hinblick auf die "Notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung" (Proposition 4.2.5).

Also  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $S = \mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ .

Gradient  $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 \Leftrightarrow 1 + x_2, 1 + x_1)$ . Untersuchung im Inneren von  $S$ , d.h. auf  $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{>0}$ .

$$\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 \Leftrightarrow 1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \Leftrightarrow 1 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

( $\Leftrightarrow 1, 3$ )  $\notin S \Rightarrow$  im Inneren existieren keine Minima!

**Randuntersuchung:**  $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$

1. Fall:  $x_1 = 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = (x_2 \Leftrightarrow 1, 1)$ . Die ds mit der Eigenschaft

$$(*) \quad \exists \varepsilon > 0 : x^* + \alpha d \in S, \forall \alpha \in [0, \varepsilon]$$

aus der Proposition 4.2.5 sind diejenigen  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit  $d_1 \geq 0$ . Wenn  $x^*$  ein relatives Minimum von  $f$  in  $S$  sein soll, muß laut Proposition 4.2.5 für diese Vektoren  $d$  gelten:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \nabla f(x^*) \cdot d \geq 0 \\ (b) \quad & \text{Falls } \nabla f(x^*) = 0, \text{ dann } d^T \cdot \nabla^2 f(x^*) \cdot d \geq 0 \end{aligned}$$

Betrachte  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix}$ . Dieses  $d$  erfüllt Eigenschaft (\*), denn  $d_1 = 0 \geq 0$ . Aber  $\nabla f(x^*) \cdot d = (x_2 \Leftrightarrow 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} = \Leftrightarrow 1 \not\geq 0 \Rightarrow$  (a) nicht erfüllt, also findet man hier auch keine Minima.

**Strategietip:** Man wähle immer einen Vektor  $d$ , mit dem man eine der Bedingungen (a) und (b) zum Widerspruch führen kann, oder mit dem man sofort die Kandidaten für Minima sieht

2. Fall:  $x_2 = 0 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 \Leftrightarrow 1, x_1 + 1)$ . Die Vektoren  $d$ , welche die Eigenschaft

(\*) erfüllen, sind diesmal diejenigen mit  $d_2 \geq 0$ . Angenommen,  $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$  ist relatives



### Aufgabe 3

Stellen Sie die Hessematrix der Funktion  $f(x, y) = x^3 + y^3 \Leftrightarrow 3xy$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  auf.

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \Leftrightarrow 3xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3x^2 \Leftrightarrow 3y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \Leftrightarrow 3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 3y^2 \Leftrightarrow 3x$$

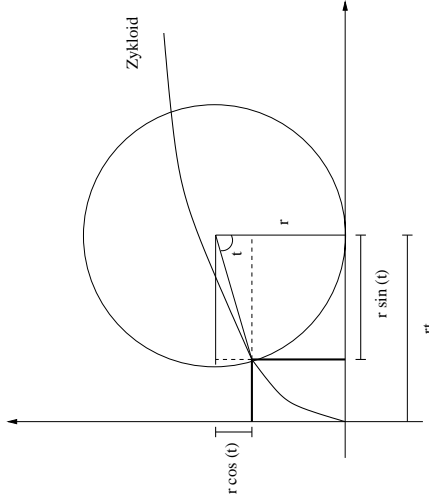
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \Leftrightarrow 3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 6y$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x & \Leftrightarrow 3 \\ \Leftrightarrow 3 & 6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Aufgabe 4

Geben Sie eine Parametrisierung für eine Zykloide an.



1. Koordinate

$= rt \Leftrightarrow r \cdot \sin(t)$
2. Koordinate

$= r \Leftrightarrow r \cdot \cos(t)$
- Damit erhält man folgende Parametrisierung für  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
- $$t \mapsto \begin{pmatrix} rt \Leftrightarrow r \cdot \sin(t) \\ r \Leftrightarrow r \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

### Satz vom Maximum und Minimum

Jede stetige Abbildung besitzt auf einem Kompaktum ein Maximum und ein Minimum, d.h.  $\exists k, K > 0 : k < n_1(x) < K, \forall x \in M$

$$\frac{x}{||x||_\infty} \in M \forall x \in \mathbb{C}^n \leftarrow \left\| \frac{x}{||x||_\infty} \right\| = \frac{1}{||x||_\infty}, ||x||_\infty$$

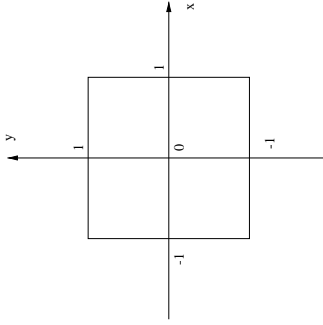
Also ist

$$k < n_1 \cdot \left( \frac{x}{||x||_\infty} \right) < K$$

$$k < \frac{x}{||x||_\infty} \cdot n_1(x) < K$$

$$k \cdot ||x||_\infty < n_1(x) < K \cdot ||x||_\infty$$

Daraus folgt die Behauptung.



### Aufgabe 3

#### Welche der Matrizen ist positiv definit?

- (a) Diese Matrix kann nicht positiv definit sein, da Diagonalelemente existieren, die  $< 0$  sind. Daher ist es nicht mehr nötig, die Eigenwerte zu betrachten. Diese Matrix ist negativ definit.
- (b) Sämtliche Diagonalelemente der Matrix sind positiv. Somit müssen wir noch die Eigenwerte der Matrix betrachten, um eine Aussage treffen zu können, ob die Matrix positiv definit ist:

$$\begin{aligned} \det(A \Leftrightarrow \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 6 \Leftrightarrow \lambda & \Leftrightarrow 2 & 2 \\ \Leftrightarrow 2 & 5 \Leftrightarrow \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 \Leftrightarrow \lambda \end{pmatrix} \\ &= (6 \Leftrightarrow \lambda)[(5 \Leftrightarrow \lambda)(7 \Leftrightarrow \lambda)] \Leftrightarrow (\Leftrightarrow 2)[(\Leftrightarrow 2)(7 \Leftrightarrow \lambda)] + (2)[(5 \Leftrightarrow \lambda) \cdot 2] \\ &= (5 \Leftrightarrow \lambda)(6 \Leftrightarrow \lambda)(7 \Leftrightarrow \lambda) + 4\lambda \Leftrightarrow 28 \Leftrightarrow 20 + 4\lambda \\ &= (5 \Leftrightarrow \lambda)(6 \Leftrightarrow \lambda)(7 \Leftrightarrow \lambda) + 8\lambda \Leftrightarrow 48 \\ &= (30 \Leftrightarrow 11\lambda + \lambda^2)(7 \Leftrightarrow \lambda) + 8\lambda \Leftrightarrow 48 \\ &= (210 + 7\lambda^2 \Leftrightarrow 77\lambda \Leftrightarrow 30\lambda \Leftrightarrow \lambda^3 + 11\lambda^2) + 8\lambda \Leftrightarrow 48 \\ &= 162 + 18\lambda^2 \Leftrightarrow 99\lambda \Leftrightarrow \lambda^3 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat eine Nullstelle bei 3 ( $\lambda_1 = 3$ ). Nach Polynomdivision und mit Einsetzen in die PQ-Formel erhält man für die beiden anderen Nullstellen die Werte

$\lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$ . Somit sind alle drei Eigenwerte positiv und es handelt sich bei  $A$  um eine positiv definite Matrix.

Es ist aber auch möglich über die Hauptdeterminanten zu argumentieren, da für die positive Definitheit alle  $n$  Determinanten einer  $n \times n$ -Matrix positiv sein müssen.

Außerdem ist die Matrix symmetrisch; dies ist auch eine Voraussetzung für eine Cholesky-Zerlegung. Ziel ist nämlich:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

## Cholesky-Faktorisierung

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \Leftrightarrow 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & \Leftrightarrow 2 & 2 \\ \Leftrightarrow 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \Leftrightarrow 5 \end{pmatrix}$$

$$1. A = LL^T$$

Benutzt man folgende Formeln zum Aufbau der L-Matrix

$$l_{bk} = \sqrt{a_{kk} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \quad l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{ik} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{6}, & l_{21} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\Leftrightarrow 2) = \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{6}}, & l_{22} &= \sqrt{5 \Leftrightarrow \left( \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^2} = \sqrt{\frac{13}{3}}, \\ l_{31} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \Leftrightarrow 0) = \frac{2}{\sqrt{6}}, & l_{32} &= \sqrt{\frac{3}{13}} \left( 0 \Leftrightarrow \left( \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \left( \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right) = \sqrt{\frac{4}{39}}, \\ l_{33} &= \sqrt{7 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{39}} = \sqrt{\frac{273}{39} \Leftrightarrow \frac{26}{39} \Leftrightarrow \frac{4}{39}} = \sqrt{\frac{243}{39}} = \sqrt{\frac{81}{13}} \end{aligned}$$

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{6}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} \end{pmatrix}$$

$$2. Lc = b$$

(b) Zu zeigen:  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$$\begin{aligned} \nabla(fg)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot g(x) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \cdot f(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot g(x) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \cdot f(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot g(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot f(x) = \nabla f(x) \cdot g(x) + \nabla g(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Zu (\*): Man kann hier die Produktregel aus dem 1-dim verwenden.

(c) Zu zeigen:  $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \alpha \nabla f(x) \end{aligned}$$

(d) Zu zeigen:  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}g(x) - f(x)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x)}{g^2(x)} \\ \vdots \\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}g(x) - f(x)\frac{\partial g}{\partial x_n}(x)}{g^2(x)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\nabla f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \nabla g(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

□

# 11. Übung

## Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_2$$

Die gesuchten Funktionen haben die Form:

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + c$$

( $c$  konstant)

## Aufgabe 2

Die Funktion  $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $S$  offen) mögen in  $x \in S$  Gradienten besitzen. Dann trifft dies auch für  $f + g, fg, \alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) und  $\frac{f}{g}$  (falls  $g(x) \neq 0$ ) zu. Zeigen Sie nun, daß die folgenden Formeln gelten (wobei als Argument jeweils  $x$  zu ergänzen ist):

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g & (b) \quad \nabla(fg) &= f\nabla g + g\nabla f \\ (c) \quad \nabla(\alpha f) &= \alpha\nabla f & (d) \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \end{aligned}$$

(a) Zu zeigen:  $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ .

$$\begin{aligned} \nabla(f+g)(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial(f+g)}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \nabla f(x) + \nabla g(x) \end{aligned}$$

Zu (\*): Beim Ableiten nach  $x_i$  können die Funktionen  $f$  und  $g$  als Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet werden und für diese ist bekannt, daß  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  gilt.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 10 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 & 10 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} & \Leftrightarrow 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & 0 & 10 + \frac{10}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{4}{39}} & \sqrt{\frac{81}{13}} & \Leftrightarrow 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} & (\Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow \frac{10}{3}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ \Leftrightarrow \frac{15}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

$$3. L^T x = c$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{10}{6}\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{\frac{13}{3}} & \sqrt{\frac{4}{39}} & \frac{40}{3}\sqrt{\frac{3}{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{81}{13}} & \Leftrightarrow \frac{15}{13}\sqrt{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow \frac{5}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow \frac{5}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 4

Zu betrachten ist das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pivotlement =  $a_{11}$ :

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 0,00 & \Leftrightarrow 99,00 & \Leftrightarrow 99,00 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 200,00 & 100,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{pmatrix}$$

Pivotelement =  $a_{21}$ :

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 200,00 & 100,00 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,00 & 199,00 & 99,00 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,50 \\ 0,00 & 1,00 & 0,50 \end{pmatrix}$$

merkung: Eigentlich muß man die 199 nach 2-stelliger Arithmetik umrechnen:

$$199 = 10^3 \cdot 0,199 \approx 10^3 \cdot 0,20 = 200$$

man erkennt, daß bei  $a_{11}$  als Pivotelement "numerische Anlöschung" stattfindet.

$$(i) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & u \leq x \leq o \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max & c^T \cdot (x \Leftrightarrow u) \\ \text{unter} & \underbrace{A(x \Leftrightarrow u)}_{:=\tilde{x}} = b \Leftrightarrow Au \Rightarrow \underbrace{0 \leq x \Leftrightarrow u \leq o \Leftrightarrow u}_{:=\tilde{s}} \end{array} \begin{array}{ll} \max & c^T \tilde{x} \\ \text{unter} & A\tilde{x} = \tilde{b} \\ & 0 \leq \tilde{x} \leq x \end{array}$$

## Aufgabe 3

**Redundanz in linearen Programmen.** Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen in Standardform:

$$\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Folgende 3 Fälle von *Redundanz* können in diesem System auftreten:

1. *Redundante Gleichungen:* Eine der Gleichungen kann als Linearkombination der anderen ausgedrückt werden.
2. *Null-Variablen:* Für eine Variable  $x_i$  ist die Ungleichung  $x_i \geq 0$  redundant (d.h. es ergibt sich schon aus den Gleichungen, daß  $x_i \geq a$  für ein  $a > 0$  gelten muß).

Beantworten Sie nun folgende Fragen:

- (a) Gibt es Null-Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{ll} (I) & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6 \\ (II) & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(I) \Leftrightarrow 2 \cdot (II) : \quad x_2 + 2x_4 = 0 \Rightarrow \text{da } x_2, x_4 \geq 0 : x_2 = x_4 = 0 \text{ (Nullvariablen)}$$

- (b) Gibt es nicht-extremale Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{ll} (I) & x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ (II) & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$(II) \Leftrightarrow (I) : \quad x_1 = \underbrace{2x_2 + x_3 + 2}_{\geq 2} \Rightarrow x_1 \text{ ist nicht-extremale Variable (} a = 2 \text{)}.$$

- (c) Wie kann man ein System von linearen Ungleichungen in Standardform, in welchem einer der obigen Fälle von Redundanz auftritt, vereinfachen? Wie sieht eine solche Vereinfachung für (a) und (b) aus?

Für (a):

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + 4x_3 = 6 & \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_3 = 3 & \end{array}$$

Für (b):

$$\begin{array}{ll} (x_1 \Leftrightarrow 2) + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2(x_1 \Leftrightarrow 2) + x_2 + 3x_3 = 6 \end{array}$$



ch Ausmultiplikation erhält man:

$$Ax + A\Delta x + \Delta Ax + \Delta A\Delta x = b + \Delta b$$

gen  $Ax = b$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= \Delta b \Leftrightarrow \Delta Ax \Leftrightarrow \Delta A\Delta x \\ \Delta x &= \Leftrightarrow A^{-1} [\Leftrightarrow \Delta b + \Delta Ax + \Delta A\Delta x] \end{aligned}$$

r verträgliche Normen folgt daraus:

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Leftrightarrow \Delta b + \Delta Ax + \Delta A\Delta x\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot [\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\| + \|\Delta A\| \cdot \|\Delta x\|] \end{aligned}$$

es kann man folgendermaßen umformen:

$$(*) \quad (1 \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|) \cdot \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot [\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|]$$

ch Voraussetzung gilt außerdem:  $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ .

nn folgt aus (\*) die Abschätzung für die Norm des Fehlers  $\Delta x$ :

$$(**) \quad \|\Delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot [\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|]$$

is 2.7 in der Vorlesung und der Tatsache, daß  $Ax = b$  folgt:

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{bzw.} \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

raus und aus (\*\*) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left[ \frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right] \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left[ \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right] \end{aligned}$$

t  $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| = \frac{cond(A) \cdot \|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$  erhält man schließlich:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A)}{1 \Leftrightarrow cond(A)} \cdot \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

□

## Aufgabe 3

**Modellbildung:** Das Ende der Prohibition in Amerika stellte die Familie vor das Problem, das n legale Alkoholgeschäfte nach marktwirtschaftlichen Grundsätzen zu betreiben. Glücklicher-ise hatte der Pate seinen Sohn in weiser Voraussicht Wirtschaftsinformatik studieren lassen. es leider noch nicht viele Computer gab, war dieser natürlich arbeitslos, aber sein theore-des Wissen konnte er nun sinnvoll in die Familiengeschäfte einbringen. Im Lagerhaus der mlie fand er neben den üblichen Mafantensilien noch ca. 2000 Flaschen Whisky der Marke

Das Pivorelement ist  $x_{22}$ .

Endtableau:

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\Leftrightarrow ZF$
0	0	0	3	7	-16
0	0	1	-3	4	8
0	1	0	-1	1	2
1	0	0	0	-1	1

Die Optimallösung für  $x_1$  ist 1 und für  $x_2$  ist 2 mit

$$ZF(x_1, x_2) = 10 + 6 = 16 = \Leftrightarrow (\Leftrightarrow ZF).$$

## Aufgabe 3

Wie im Skript versprochen wollen wir nun ein Beispiel für mögliches *Kreisen* (oder *Zykeln*) des Simplexverfahrens betrachten:

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_2 & + & 4x_4 & + & 4x_6 \\ \text{unter} & x_1 \Leftrightarrow 3x_2 & \Leftrightarrow & x_3 & \Leftrightarrow & x_4 & \Leftrightarrow & x_5 & + & 6x_6 & = & 0 \\ & + & 2x_2 & + & x_3 & \Leftrightarrow & 3x_4 & \Leftrightarrow & x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ & & & & & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

- Bestimmen Sie das zu  $B = \{1, 2\}$  gehörige Tableau.
- Iterieren Sie (Simplexverfahren) unter der Verwendung der *Steilster*  $\Leftrightarrow$  *Anstieg*  $\Leftrightarrow$  *Regel*, bis Kreisen eintritt.
- Überlegen Sie sich, wie man das Kreisen verhindern kann.

Würde aus der Bewertung herausgenommen, da Aufgabenstellung "falsch".

Schließlich muß man das maximale Matching finden, deshalb  $max$   $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot x$ . Man sucht nämlich nach den passenden Kanten, die das maximale Matching bilden.

## Aufgabe 2

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe des Simplexverfahrens:

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_1 + 3x_2 \\ \text{unter} \quad & x_1 \Leftrightarrow 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_{1,2} \geq 0 \end{aligned}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Leftrightarrow 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix}$$
$$b = (3, 3, 1)^T$$
$$c = (10, 3, 0, 0, 0)^T$$

Anfangstableau und Umformungsschritte:

	$x_1$	$x_2$	$1$	$\frac{x^0}{a_{ij}}$	$y_3$	$x_2$	$1$	$\frac{x^1}{a'_{ij}}$	$y_1$	$y_2$	$1$
$y_1$	$\Leftrightarrow 1$	$3$	$\Leftrightarrow 3$	$\frac{3}{3}$	$1$	$3$	$2$	$\frac{2}{3}$	$x_2$	$\Leftrightarrow 3$	$8$
$y_2$	$\Leftrightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1$	$3$	$\Leftrightarrow 3$	$1$	$\boxed{-1}$	$2$	$\Leftrightarrow 2$	$x_1$	$\Leftrightarrow 1$	$\boxed{2}$
$y_3$	$\boxed{-1}$	$0$	$1$	$\Leftrightarrow 1$	$\Leftrightarrow 1$	$0$	$1$		$x_1$	$\Leftrightarrow 1$	$\boxed{1}$
ZF	$10$	$3$	$0$		$\Leftrightarrow 10$	$3$	$10$		ZF	$7$	$\Leftrightarrow 3$
											$\boxed{16}$

Damit ergeben sich die folgenden Lösungen für die Variablen und die Zielfunktion:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $ZF(x_1, x_2) = 16$

Hier der Lösungsweg nach der Vorlesung:

Ausgangstableau:

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\Leftrightarrow ZF$
$10$	$3$	$0$	$0$	$0$	
$1$	$-3$	$1$	$0$	$0$	$3$
$1$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$3$
$1$	$0$	$0$	$0$	$-1$	$1$

Das Pivotelement ist  $x_{31}$ .

1. Tableau:

$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\Leftrightarrow ZF$
$0$	$3$	$0$	$0$	$10$	$-10$
$0$	$-3$	$1$	$0$	$1$	$2$
$0$	$1$	$0$	$-1$	$1$	$2$
$1$	$0$	$0$	$0$	$-1$	$1$

Winnfridrich, 2500 Flaschen Korbelschnaps und 1200 Flaschen 50-prozentigen Brennspirit. Nach einer feuchtföhlichen Marktanalyse sah der Sohn des Paten keine großen Absatzchancen für diese Originalprodukte. Daher beschloß er, durch Mischen die neuen Whiskysorten Winnie Talker, Blonde Beauty und Simple zu produzieren zu lassen, welche zu 22.5 cts, 28.5 cts und 35 cts pro Flasche verkauft werden sollten. Als Wiederbeschaffungspreis für die Ausgangsprodukte ermittelte Winnie Talker, Korbelschnaps und Brennspirit 35 cts, 25 cts bzw. 20 cts pro Flasche. Auf einigen Familienfeiern wurden durch exzessives Probieren folgende Vorgaben für die Mischungsverhältnisse festgelegt:

Winnie Talker	wenigstens	60% Winnfridrich
	höchstens	20% Brennspirit
Blonde Beauty	wenigstens	15% Winnfridrich
	höchstens	60% Brennspirit
Simple	höchstens	50% Brennspirit

Absatzschwierigkeiten waren auf Grund der langjährigen guten Kontakte in der Alkoholbranche und einem familieneigenen Talent, Kunden mit handfesten Argumenten zu überzeugen, nicht zu befürchten. Wie sah das lineare Programm aus, das der Sohn des Paten für dieses Problem in Hinblick auf die Gewinnmaximierung (Erlös - Wiederbeschaffungspreis) aufstellte?  $x_{ij}$  = Anzahl Flaschen der Sorte  $i$ , die für die Herstellung von Sorte  $j$  benutzt werden. Haben dann folgende Bedingungen:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 2000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2500 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1200 \end{cases} \quad \begin{cases} 0, 60 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq x_{11} \\ 0, 20 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) \geq x_{31} \\ 0, 15 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \leq x_{12} \\ 0, 60 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \geq x_{32} \\ 0, 50 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33}) \geq x_{33} \end{cases}$$

Damit erhält man die folgende Zielfunktion:

$$\begin{aligned} Z(x) &= 22,5 \cdot (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 28,5 \cdot (x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ &\quad + 34,5 \cdot (x_{13} + x_{23} + x_{33}) \Leftrightarrow 35,0 \cdot (x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ &\Leftrightarrow 25,0 \cdot (x_{21} + x_{22} + x_{23}) \Leftrightarrow 20,0 \cdot (x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ &\Leftrightarrow 12,5x_{11} \Leftrightarrow 2,5x_{21} + 2,5x_{31} \Leftrightarrow 6,5x_{12} + 3,5x_{22} \\ &\quad + 8,5x_{32} \Leftrightarrow x_{13} + 9x_{23} + 14x_{33} \end{aligned}$$

# Übung

## Aufgabe 1

Das Farkas' Lemma der Vorlesung wird oft in folgender äquivalenter Formulierung angegeben:  
 Gegeben seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann gilt  
 entweder (i)  $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b$ ,  
 oder (ii)  $\exists u \in \mathbb{R}_+^m : u^T A = 0$  und  $u^T b < 0$ ,  
 aber nicht beides.  
 Zeigen Sie diese Form des Farkas' Lemmas aus der Ihnen bekannten her.  
 Diese Aufgabe wurde aus der Bewertung herausgenommen, da als zu schwer angesehen.

## Aufgabe 2

Zeigen Sie die Aussage der Übung 3.1.6 des Skriptes:  
 Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform ist ein Polyeder.  
 (Definition 3.1.2 ist)

$$\max c^T x \text{ unter } Ax = b, x \geq 0$$

Lineares Optimierungsproblem in Standardform. Ist  $x \geq 0$  mit  $Ax = b$ , so sagen wir  $x$  ist zulässig für das Problem.

Ein Polyeder ist folgendermaßen definiert:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

„Ausagen“ sind äquivalent:

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax \leq b \wedge \underbrace{Ax \geq b}_{-Ax \leq -b}$$

zulässigkeit kann also wie folgt umgeschrieben und dann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \{x \mid Ax = b \wedge x \geq 0\} &= \{x \mid Ax \leq b \wedge \Leftrightarrow Ax \leq \Leftrightarrow b \wedge \Leftrightarrow E \cdot x \leq 0\} \\ &= \left\{ x \mid \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\stackrel{\substack{\text{=: } A' \\ \text{=: } b'}}{=} \{x \mid A'x \leq b'\} \end{aligned}$$

Man sieht kann damit also auf ein Polyeder geschlossen werden. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

# 9. Übung

## Aufgabe 1

[...] Folgender Satz von König beschreibt maximales matching:

$$\max \# \text{ matching} = \min \# \text{ Überdeckung}$$

[...] Dies ist die Aussage des Satzes von König, welche Sie nun beweisen sollten! [...]

Sei  $A$  die Inzidenzmatrix des bipartiten Graphen. „Suche nach dem maximalen Matching“ ist äquivalent zu folgendem LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \Bigg\} n \\ \text{unter} \quad & Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg\} m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Die Maximallösung dieses Problems ist ein Vektor  $x \in \{0,1\}^n$  (davon überzeugt man sich, indem man das Simplex-Tableau zu dem Problem aufstellt und Iterationen durchführt. Man sieht dann, daß auf der rechten Seite nur die Zahlen 0 und 1 auftauchen, daher diese Form des Optimalvektor!)

**Warum gibt der Optimalvektor aber das maximale Matching an?**

Dazu muß man zuerst untersuchen, was die Multiplikation der Inzidenzmatrix  $A \in \{0,1\}^{m \times n}$  mit einem Vektor  $x \in \{0,1\}^n$  bewirkt. Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist genau der Summenvektor der 2-ten und 4-ten Spalten von  $A$  (liegt daran, daß die 2-te und 4-te Komponente von  $x$  1 waren, die anderen gleich 0).

Die 2 oben im Ergebnisvektor kommt dadurch zustande, daß der 2-te und 4-te Spaltenvektor von  $A$  (Kanten) 1 als erste Komponente hatten, dh. sie sind beide mit dem ersten Knoten verbunden. Bei einem Matching soll aber genau dies nicht eintreffen. Zwei Kanten dürfen nie mit demselben Knoten verbunden sein (indizieren). Man muß also verhindern, daß 2 oder eine

Zahl  $> 2$  Komponente von  $Ax$  wird, daher die Einschränkung  $Ax \leq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .



oder Linearkombinationen anderer Zeilen vorkommen. In Aufgabe 3c wurde gesagt, daß die Unterdeterminanten einer Inzidenzmatrix nur den Wert 0, 1 oder -1 haben. Beim Anwenden der Cramerschen Regel zur Lösung des Gleichungssystems erkennt man dann, daß dieses auch wirklich nur ganzzahlig lösbar ist.

## Aufgabe 3

Für zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $[p, q]$  die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$[p, q] := \{(\lambda \Leftrightarrow \lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}$$

Wir sagen, eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  sei konvex, wenn mit je zwei Punkten  $p, q \in K$  auch  $[p, q] \subset K$  gilt. Beweisen Sie nun folgenden Satz: Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex und sind  $p_0, \dots, p_k \in K$ , so enthält  $K$  jede Konvexkombination  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$ .

$K \subset \mathbb{R}^n$  konvex. Zu zeigen: jede Konvexkombination von endlich vielen Punkten aus  $K$  auch  $\in K$  (wobei wenn  $p_0, \dots, p_k \in K$ , "Konvexkombination heißt ein Vektor der Form  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$ , mit  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$  und  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ). Beweis durch vollständige Induktion über  $k$ :

**Induktionsanfang:**

$k = 0$  D.h. in diesem Fall haben wir nur einen Vektor  $p_0 \in K$ . Die einzige Konvexkombination von einem einzigen Vektor ist der Vektor selbst (denn die Summe der Koeffizienten muß 1 sein, hier gibt es aber **nur einen** Koeffizienten,  $\lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = 1$ ) und der ist in  $K$ .

$k = 1$  Offensichtlich ist  $\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 \in K$ , wenn  $p_0, p_1 \in K$ ,  $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$  mit  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ , denn konvex.

**Induktionsschritt:**  $k \rightarrow k + 1$

Seien  $p_0, \dots, p_{k+1} \in K$ ,  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Zu zeigen:  $p := \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_{k+1} p_{k+1} \in K$ . Daraus folgt:

$$p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k + \lambda_{k+1} p_{k+1} = \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i \right) \cdot \frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} + \lambda_{k+1} p_{k+1}$$

$p$  ist also eine Konvexkombination von 2 Punkten:  $\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i}$  und  $p_{k+1}$  (denn Summe der Koeffizienten  $= \sum_{i=0}^k \lambda_i + \lambda_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i = 1$ ). Falls diese beiden Punkte  $\in K$  wären, würde sofort folgen:  $p \in K$ , wegen der Definition der Konvexität (für  $K$ ).  
 $p_{k+1} \in K$  ist klar (wegen Voraussetzung) und

$$\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \cdot p_0 + \dots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \cdot p_k$$

ist Konvexkombination der Punkte  $p_0, \dots, p_k$ , denn alle Koeffizienten  $\geq 0$  und ihre Summe

$$\frac{\lambda_0}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} + \dots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} = 1$$

$p_0, \dots, p_k \in K \Rightarrow$  wegen Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\frac{\sum_{j=0}^k \lambda_j p_j}{\sum_{i=0}^k \lambda_i} \in K \Rightarrow \text{Behauptung}$$

alternativ" zu diesem Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i p_i + \lambda_k p_k &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot \left( \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i p_i + \lambda_k p_k \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \left( \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j} \lambda_j p_i}_{\substack{(\equiv p) \text{ Konvexkomb. n. Ind. voraus.}}} + \frac{\lambda_k}{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot p_k \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \cdot \left( p + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_j} \cdot p_k \right) \\
 &= \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j p + \lambda_k p_k}_{\in K \text{ Konvexkomb.}}
 \end{aligned}$$

□

3. Die Untermatrix besitzt in jeder Spalte genau zwei 1-en (mehr ist sowieso nicht möglich, da jede Kante nur 2 Knoten verbinden kann). Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} * & & * \\ \begin{pmatrix} \square & 0 & \square \\ \dots & 0 & \dots \\ \square & 1 & \square \end{pmatrix} \\ * & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \square & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Weil der Graph bipartit ist (d.h. es gibt 2 Partitionen), kann man leicht erkennen, daß die Summe der (linear unabhängigen) Zeilenvektoren, die zu den Knoten derselben Partition gehören, mit der Summe der Zeilenvektoren zu Knoten aus der anderen Partition übereinstimmen, d.h.:

$$\sum \text{Zeilenvektoren einer Partition} = \sum \text{Zeilenvektoren anderer Partition}$$

Im obigen Beispiel bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei solchen Matrizen gibt es also eine nicht-triviale Linearkombination der Zeilenvektoren, so daß linear abhängige Partitionen entstehen  $\Rightarrow \det = 0$ .

Aus den drei Fällen folgt die Behauptung.

## Aufgabe 4

Es sei  $A$  eine reguläre Matrix. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  und nehmen an, daß die Komponenten von  $b$  alle ganzzahlig sind. Zeigen Sie nun: Falls  $A$  die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist obiges Gleichungssystem ganzzahlig lösbar.

$A$  sei also eine reguläre Matrix, d.h.  $\det(A) \neq 0$ . Die Aussage der obigen Aufgabenstellung läßt sich mit Hilfe der *Cramerschen Regel* belegen. Es heißt nämlich: Ist  $\det(A) \neq 0$ , d.h. regulär, so kann die Lösung des inhomogenen Gleichungssystem explizit und eindeutig angegeben werden:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Mit  $D_j$  wird die Determinante bezeichnet, die aus  $D$  dadurch entsteht, daß die Elemente  $a_{ij}$  der  $j$ -ten Spalte von  $D$  durch die Absolutglieder  $b_j$  ersetzt werden. Der Fall  $D = 0$  kann hier ausgeschlossen werden, da in der Inzidenzmatrix weder eine Nullzeile noch identische Zeilen

Unterdeterminanten ist hier wohl die Menge aller möglichen Kombinationen von Determinanten gemeint, die sich aus der Inzidenzmatrix bilden lassen. Hier ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per definitionem haben die Unterdeterminanten damit folgende Eigenschaft:  $a_{ij} : i, j \in \{0, 1\}$ , d.h. die Einträge der Unterdeterminanten können entweder nur 0 oder 1 sein.

Alle  $(1 \times 1)$ -Unterdeterminanten können nur den Wert 0 oder 1 haben, da die Einträge der Unterdeterminanten ja auch nur Einträge 0 oder 1 haben, d.h. der Fall, daß eine Unterdeterminanten den Wert -1 hat, trifft also nur für den Fall von mindestens  $(2 \times 2)$ -Unterdeterminanten auf.

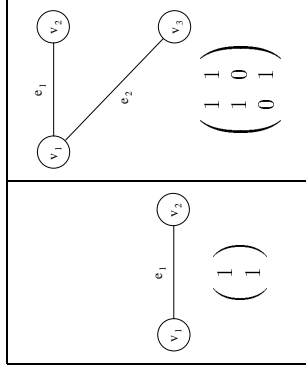
Generell gilt für das Nullwerden einer Determinante:

Eine Determinante ist gleich Null, wenn

1. eine Zeile aus lauter Nullen besteht,
2. zwei Zeilen einander gleich sind,
3. eine Zeile eine Linearkombination anderer Zeilen ist.

Beweis durch vollständige Induktion. **Induktionsbeginn:**

Betrachte die einfachsten Fälle und untersuche die Determinante:



Es ist offensichtlich, daß ihre Unterdeterminanten  $\in \{0, \pm 1\}$ .

**Induktionsschritt:**

Behauptung gelte für alle Unterdeterminanten  $l \times l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) und zeige sie auch für  $(l+1) \times (l+1)$ . Betrachte eine beliebige  $(l+1) \times (l+1)$ -Untermatrix einer Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen. Unterscheide drei Fälle:

1. Die Unterdeterminante besitzt eine Nullstelle  $\Rightarrow \det = 0$
2. Es gibt eine Spalte, wo nur eine 1 vorkommt. Dann ist

$$\det(\text{Untermatrix}) = (\pm 1) \cdot \det(\text{Unter-Untermatrix}) \in \{0, \pm 1\}$$

$\in \{0, \pm 1\}$  wg. Ind. vor.

## 8. Übung

### Aufgabe 1

Dualisieren Sie die beiden folgenden Programme. (Notation wie in der Vorlesung):

$$\begin{aligned} (a) \quad & \max c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} & \min u^T b \\ & u^T A \geq c^T \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Im folgenden sei  $s := \text{Schlupfvektor}$ .

**Lösung zu (a):**

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}} & \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \max \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \\ (A, E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}} & \xleftrightarrow{\text{dualisiere}} \boxed{\begin{aligned} \min y^T b \\ y^T(A, E) \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \min y^T b \\ y^T A \geq c^T \\ y \geq 0 \end{aligned}}$$

**Lösung zu (b):**

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{aligned} \min u^T b \\ u^T A \geq c^T \\ u \geq 0 \end{aligned}} & \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \max \Leftrightarrow b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{aligned}} & \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \max \begin{pmatrix} \Leftrightarrow b \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = c \\ (A^T, \Leftrightarrow E) \cdot \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}} \\ & \xleftrightarrow{\text{dualisiere}} \boxed{\begin{aligned} \min y^T c \\ y^T(A^T, \Leftrightarrow E) \geq \begin{pmatrix} \Leftrightarrow b \\ 0 \end{pmatrix}^T \end{aligned}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \min y^T c \\ y^T A^T \geq \Leftrightarrow b^T \\ \Leftrightarrow y^T \geq 0 \end{aligned}} \\ & \rightarrow \boxed{\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}} \end{aligned}$$

$x := -y$

Jeder linearen Optimierungsaufgabe (primales Problem) läßt sich umkehrbar eindeutig ein zwisches Optimierungsproblem (duals Problem) zuordnen:

Primales Problem

$$\begin{aligned} \text{ZF:} \quad & f(x) = c_1^T x_1 + c_2^T x_2 = \max \\ \text{NB:} \quad & \begin{aligned} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 &\leq b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 &= b_2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\text{ frei} \end{aligned} \end{aligned}$$

Duales Problem

$$\begin{aligned} \text{ZF*}: \quad & g(u) = b_1^T u_1 + b_2^T u_2 = \min \\ \text{NB:} \quad & \begin{aligned} A_1^T u_1 + A_2^T u_2 &\geq c_1 \\ A_1^T u_1 + A_2^T u_2 &= c_2 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 &\text{ frei} \end{aligned} \end{aligned}$$

Koeffizienten der Zielfunktion des einen Problems bilden die rechte Seite der Nebenbedingungen des anderen Problems. Jeder freien Variable entspricht eine Gleichungs- und jeder zeichenbeschränkten Variable eine Ungleichungsbedingung des jeweiligen anderen Problems.

## Aufgabe 2

geben Sie:

1) Das duale Programm des dualen Programms ist das primale Programm.

2) Folgern Sie hieraus: Ist das primale Programm zulässig und beschränkt, so gibt es für beide Programme Optimallösungen  $x^*$  und  $y^*$  und es gilt:  $c^T x^* = y^{*T}$ .

(1):

nächst: Überführung des dualen Programms in Standardform:

$$\begin{aligned} \min y^T b \quad & y^T A \Leftrightarrow s^T = c^T \\ & s \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max & \Leftrightarrow y^{+T}, y^{-T} \begin{pmatrix} b \\ \Leftrightarrow b \end{pmatrix} \\ & (y^{+T}, y^{-T}) \begin{pmatrix} A \\ \Leftrightarrow A \end{pmatrix} \Leftrightarrow s^T = c^T \\ & (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max & \Leftrightarrow (b^T, \Leftrightarrow b^T) \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} \\ & (A^T, \Leftrightarrow A^T) \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = c \\ & (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left. \begin{aligned} \max & \Leftrightarrow (b^T, \Leftrightarrow b^T, 0) \cdot \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} \\ & (A^T, \Leftrightarrow A^T, \Leftrightarrow b^T) \cdot \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \\ s \end{pmatrix} = c \\ & (s, y^+, y^-) \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{Standardform}$$

cluster Schritte: Dualisieren des dualen Programms

$$\begin{aligned} \min x^T c \quad & x^T A^T \geq \Leftrightarrow b^T \\ & \Leftrightarrow x^T A^T \geq b^T \\ & \Leftrightarrow x^T \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min x^T c \quad & \Leftrightarrow \min x^T c \\ & x^T A^T \geq \Leftrightarrow b^T \\ & \Leftrightarrow x^T A^T \geq b^T \\ & \Leftrightarrow x^T \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max ( \Leftrightarrow x )^T c \quad & A ( \Leftrightarrow x ) = b \rightarrow A \hat{x} = b \\ & ( \Leftrightarrow x ) \geq 0 \quad \hat{x} \geq 0 \end{aligned}$$

(I)  $x^*$  Optimum des primalen Programms  
Zu (2): (II)  $y^*$  Optimum des dualen Programms  
(I')  $y^{**}$  Optimum des dualen dualen Programms

$$\underbrace{c^T x^*}_{(I)} \leq \underbrace{y^{*T} b}_{(II)} \leq \underbrace{c^T y^{**}}_{(I')}$$

Demnach gilt:  $(I) = (I') \Rightarrow c^T x^* = y^{*T} b$

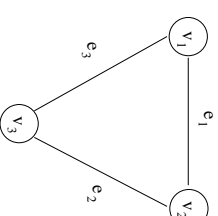
## Aufgabe 3

[...] Lösen Sie nun folgende Aufgaben:

- Stellen Sie in Inzidenzmatrix zu obigem Beispiel auf.
- Berechnen Sie die Determinante der Inzidenzmatrix eines Graphen mit 3 Knoten, welche durch alle Kanten miteinander verbunden sind.
- Überlegen Sie sich, daß alle Unterdeterminanten der Inzidenzmatrix eines *bipartiten* Graphen den Wert 0, 1 oder -1 haben. (Solche Matrizen nennt man auch *total unimodular*.)

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$v_1$	1	1	0	1
$v_2$	1	1	0	1
$v_3$	0	1	0	0
$v_4$	0	0	1	0
$v_5$	0	0	0	1

(b) Gegeben sei folgender "Dreiecksgraph":



	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$v_1$	1	1	0
$v_2$	1	1	0
$v_3$	0	1	1

Determinante der Inzidenzmatrix:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

(c) Es wird vorausgesetzt, daß die gebildeten Unterdeterminanten aus quadratischen Inzidenzmatrizen entstehen. Alle Unterdeterminanten sollen den Wert 0, 1 oder -1 haben. Mit