Appendix C: Pathologisches Beispiel zu Satz 4.2.8

Zum Abschluß wollen wir noch ein Beispiel angeben, das zeigt, daß es nicht selbstverständlich ist, daß ein Punkt, der in allen Richtungen ein lokales Minimum ist, auch insgesamt ein lokales Minimum ist. Um dies zu erreichen müssen wir uns allerding in einen unendlich dimensionalen Vektorraum begeben. Sei

$$V := \left\{ (a_1, a_2, \ldots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \right\}$$

der Vektorraum der absolut konvergenten Reihen. Dann ist die Zweinorm gegeben durch

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty.$$

Von den Axiomen einer Norm ist nur die Dreiecksungleichung nicht sofort klar. Hierfür berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2} \right)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 + 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 \right)} \\
&\overset{\sqrt{}\text{konkav}}{\geq} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 + 2 \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i + b_i \right)^2 .
\end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_k(a) = \frac{a_k^2}{k^2} - a_k^4.$$

Sei nun $f : V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a).$$

Mit a und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist dann auch $f(a)$ konvergent. Man überzeuge sich, daß f auch stetig ist.

Wir behaupten nun 0 ist ein relatives Minimum der Funktion $f(td)$ für jede Richtung $d = (d_1, d_2, \ldots)$, aber kein relatives Minimum von f.

Sei also d vorgegeben.

$$\begin{aligned} f(0+td) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^2 d_i^2}{i^2} - t^4 d_i^4 \\ &= t^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i^2}{i^2} \right) - t^2 \sum_{i=1}^{\infty} d_i^4 \right) > 0, \end{aligned}$$

für $|t|$ klein genug. Wegen $f(0) = 0$ ist 0 also ein lokales Minimum von $f(td)$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $k > \frac{2}{\varepsilon}$. Sei $a = (0, 0, \ldots, \frac{2}{k}, 0, \ldots)$, wobei der Nichtnulleintrag an k-ter Stelle liegt. Dann ist $\|a\| < \varepsilon$, also $a \in U_\varepsilon(a)$ und

$$f(a) = \frac{4}{k^4} - \frac{16}{k^4} < 0 = f(0).$$

Also ist 0 kein lokales Minimum von f.