PD Dr. W. Hochstättler
(mit Aufgaben von Dr. K. Plewe) **SS 99**

Klausur zur Fachprüfung
Mathematik
des Vordiploms Wirtschaftsinformatik

Die Klausur ist in zwei Blöcke aufgeteilt. Die Aufgaben des ersten Blocks beinhalten Aufgaben aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker, der zweite Block Algorithmische Mathematik. Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 60 Punkte, wobei in jedem block mindestens 20 Punkte erreicht werden müssen. Als Hilfsmittel sind zugelassen Schreibstift, Lineal, nicht-programmierbare Taschenrechner sowie die Formelsammlung aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker. **Man gebe stets Zwischenschritte an, die zur Lösung führen; Ergebnisse ohne ausreichende Begründung können nicht gewertet werden.**

Kreuzen Sie auf diesem Deckblatt die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an. Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Klausurpapier. Versehen Sie jedes Blatt links oben mit Ihrem Namen. Geben Sie am Ende der Klausur alle benutzten Blätter (incl. Deckblatt und Schmierpapier) ab. Viel Erfolg!

Name: ____________________ Vorname: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker:

Aufgabe 1: *(Summen und Reihen)*

i) Schreiben Sie unter Verwendung des Summenzeichens und berechnen Sie mit geeigneter Summenformel die endliche Reihe

$$\frac{3^1}{2^0} - \frac{3^2}{2^1} + \frac{3^3}{2^2} - \frac{3^4}{2^3} + \ldots - \ldots ? \frac{?}{2048}.$$

ii) Schreiben Sie $\frac{1}{\sqrt{e}}$ als unendliche Reihe. Berechnen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!}$.

4+4 Punkte

Aufgabe 2: *(Vektorrechnung)*

i) Zeigen Sie, daß ein Rechteck genau dann ein Quadrat ist, wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

ii) A, B, C, D seien beliebige Punkte des Raumes. Man beweise, daß die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD, DA ein Parallelogramm bilden.

5+4 Punkte

Aufgabe 3: *(An- und Verkauf)*
Eine Farbenfabrik produziert und verkauft pro Woche x_1 Dosen Holzlasur, x_2 Dosen Holzlack, x_3 Dosen Metallack, x_4 Dosen Fußbodenlack, x_5 Dosen Betonbeschichtung. Die Herstellungskosten einer Dose des i-ten Produkts betragen k_i DM, der Gewinn bei Verkauf an den Großhändler g_i DM. Man nennt die 5-dimensionalen Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ Produktionsvektor, $k = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$ Kostenvektor, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$ Gewinnvektor.

i) Welche Bedeutung hat das innere Produkt $x^\top k$? (Begründung!)

ii) Wie läßt sich der Gesamtgewinn vektoriell ausdrücken?

iii) Welche geschäftliche Bedeutung hat es, wenn die Vektoren x und g zueinander orthogonal sind?

iv) Welches sind die für den Großhändler maßgeblichen Einkaufspreise, wie sieht der zugehörige Preisvektor aus? Welchen Betrag überweist er der Farbenfabrik, wenn er vom i-ten Produkt jeweils m_i Dosen abnimmt (vektorielle Schreibweise!)?

8 Punkte

Aufgabe 4: *(gerade und ungerade)*

i) Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade, keines von beidem?

$$\frac{\tan(x)}{x}, \quad x + e^x(e^{-2x} - 1), \quad , \frac{x}{|x-2|}, \quad \ln(3^x). \text{Beweise!}$$

ii) Zeigen Sie: Die Produktfunktion einer ungeraden und einer ungeraden Funktion ist eine gerade Funktion.

4+4 Punkte

Aufgabe 5: *(Flächen)*
Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{y - x^2 + 1}$

i) den maximalen Definitionsbereich D (durch welche Figur ist D berandet?), die genaue Wertemenge; berechnen Sie die Höhenlinien $f(x, y) = 0; 2$ (was sind das für Figuren?),

ii) das Gradientenfeld $\nabla f(x, y)$, den Gradientenvektor $\nabla f(-2, 7)$,

iii) die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $P = (-2, 7, f(-2, 7))$.

5+3+3 Punkte

Aufgabe 6: *(Integrieren)*
Berechnen Sie das Doppelintegral $\int\int_G (x + xy^2) d(x, y)$ mit dem Integrationsbereich $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3\}$.

6 Punkte

Algorithmische Mathematik:

Aufgabe 7: *(LU)*

i) Was versteht man unter der LU-Zerlegung einer quadratischen Matrix?

ii) Unter welchen Voraussetzungen existiert Sie?

iii) Beschreiben Sie, wie man das Gleichungssystem $Ax = b$ in $O(n^2)$ Additionen und Multiplikationen lösen kann, wenn die LU-Zerlegung von A bekannt ist!

iv) Wie viele Additionen und Multiplikationen (Größe von k in $O(n^k)$ genügt) benötigt man für die LU-Zerlegung?

2+2+4+2 Punkte

Aufgabe 8: *(zum Simplexalgorithmus)*
Bei der Lösung des linearen Programms $\max\{c^\top x | Ax = b, x \geq 0\}$ ergebe sich folgendes Tableau (in der Version des Simplexalgorithmus, die in der Vorlesung vorgestellt wurde!).

α	-3	β	0	0	0	-10
γ	1	0	1	0	0	μ
2	2	-2	0	1	0	2
0	-1	-2	0	0	1	3

Die augenblickliche Basis ist $B = 4, 5, 6$. Welche Voraussetzungen müssen an $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ gemacht werden, damit die folgenden Aussagen wahr sind:

i) B ist eine zulässige, aber nicht optimale Basis.

ii) Das Tableau zeigt, daß das Problem unbeschränkt ist.

iii) Wenn x_1 in die Basis aufgenommen wird, bleibt der Zielfunktionswert unverändert.

3+3+2 Punkte

Aufgabe 9: *(Rechnen)*
Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\max 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4$$

$$\begin{array}{lllllllll} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0 \end{array}$$

10 Punkte

Aufgabe 10: *(Kuhn-Tucker)*
Betrachten Sie folgendes nicht-lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x + \frac{1}{2} x^\top D x \\ & x^\top x \leq 1 \end{array}$$

wobei D eine negativ definite, symmetrische Matrix sei, d.h. $x^\top D x < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

i) Wie lauten die Kuhn-Tucker Bedingungen für eine Optimallösung für dieses Problem?

ii) Zeigen Sie: Ist $\|D^{-1}c\| \leq 1$, so ist $-D^{-1}c$ die Optimallösung des Programms. Ist $\|D^{-1}c\| > 1$, so ist $(-D - \lambda I)^{-1}c$ die Optimallösung, wobei $\lambda > 0$ der eindeutige Parameter mit $\|(-D - \lambda I)^{-1}c\| = 1$ ist.

Hinweis: Begründen Sie, warum unter den gegebenen Voraussetzungen jeder Kuhn-Tucker-Punkt schon das eindeutige globale Maximum ist. Beachten Sie: $\nabla(\frac{1}{2}x^\top Q x - q^\top x) = Qx - q$. I ist die Einheitsmatrix.

4+6 Punkte

Aufgabe 11: *(Unimodal)*
Sei $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ und $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie: f ist strikt unimodal aber nicht konvex auf I.

6 Punkte

Aufgabe 12: *(Recreational)*
Welche vierstellige Zahl mit vier verschiedenen Ziffern ist durch ihr Palindrom (gleiche Ziffern rückwärts gelesen) teilbar?

6 Punkte