PD Dr. W. Hochstättler **WS 98/99**
(mit Aufgaben von Dr. K. Plewe)

Klausur zur Fachprüfung Mathematik des Vordiploms Wirtschaftsinformatik

Die Klausur ist in zwei Blöcke aufgeteilt. Die Aufgaben des ersten Blocks beinhalten Aufgaben aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker, der zweite Block Aufgaben aus der Algorithmische Mathematik. Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte, wobei in jedem Block mindestens 17 Punkte erreicht werden müssen. Als Hilfsmittel sind zugelassen Schreibstift, Lineal, 1 Taschenrechner ohne Software und ohne Datenbankfunktion sowie die Formelsammlung aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker. **Man gebe stets Zwischenschritte an, die zur Lösung führen; Ergebnisse ohne ausreichende Begründung können nicht gewertet werden.**

Kreuzen Sie auf diesem Deckblatt die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an. Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Klausurpapier. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier. Versehen Sie jedes Blatt links oben mit Ihrem Namen. Geben Sie am Ende der Klausur alle benutzten Blätter (inkl. Deckblatt und Schmierpapier) ab. Viel Erfolg!

Name: ____________________ Vorname: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker:

Aufgabe 1: *(Vektorrechnung)*

i) Zeigen Sie, daß ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn die Diagonalen gleich lang sind.

ii) A, B, C, D seine beliebige Punkte des Raumes. Man beweise, daß die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD, DA ein Parallelogramm bilden.

5+4 Punkte

Aufgabe 2: *(Determinante)*
Lösen Sie in $\mathbb{C}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & x-5 & -2 \\ 5 & -3 & 5 & x-3 \end{vmatrix} = 0.$$

6 Punkte

Aufgabe 3: *(gerade und ungerade)*

i) Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade, keines von beidem? (Beweise!)

$$\frac{\sin(x)}{x}, \quad x + e^x(1 - e^{-2x}), \quad , \frac{1}{|x-2|}, \quad \ln(2^x).$$

ii) Zeigen Sie: Die Produktfunktion einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

4+4 Punkte

Aufgabe 4: *(Stammfunktionen)*
Lösen Sie die beiden folgenden Integrale unter genauer Angabe des Lösungsweges:

$$\int x^2 \ln(x) dx, \qquad \int \frac{e^x dx}{1 + e^x}.$$

6 Punkte

Aufgabe 5: *(Rechteckschwingung)*
Bestimmen Sie zunächst die Fourierreihe $F(x)$ zu der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\pi \leq x < 0 \\ -1 & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}, \text{ sonst } f(x + 2\pi) = f(x)$$

und beantworten Sie:

a) Weshalb konvergiert die Fourierreihe $F(x)$?

b) Stellt $F(x)$ überall $f(x)$ dar?

c) Weshalb sind alle $a_k = 0$?

12 Punkte

Aufgabe 6: *(Induktion)*

i) Die Zahlenfolge $f(n)$ sei gegeben durch $f(1) = 1, f(2n) = 2f(n) - 1, f(2n + 1) = 2f(n) + 1$. Zeigen Sie: Ist $(a_k, \ldots, a_0) \in \{0, 1\}^k$ die Binärdarstellung der Zahl a (also insbesondere $a_k = 1$), so gilt

$$f(a) = f(\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i) = \sum_{i=0}^{k} (2a_i - 1) 2^i.$$

ii) Es wird mit vollständiger Induktion „bewiesen“:

> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max\{a, b\} = n$, so folgt $a = b$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar wahr.

$n \to n + 1$: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max\{a, b\} = n + 1$ gegeben. Dann ist $\max\{a - 1, b - 1\} = n$ und somit nach Induktionsvoraussetzung $a - 1 = b - 1$. Hieraus schließen wir $a = b$.

Wo ist der Fehler?

6+3 Punkte

Algorithmische Mathematik:

Aufgabe 7: *(Cholesky)*

i) Was versteht man unter der Cholesky-Faktorisierung einer symmetrischen Matrix?

ii) Unter welchen Voraussetzungen existiert Sie?

iii) Leiten Sie die Formeln zur Cholesky-Faktorisierung aus der Definition her! Wo gehen die Voraussetzungen ein?

iv) Was geschieht im Algorithmus zur Cholesky-Faktorisierung einer symmetrischen Matrix, wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist?

2+2+4+2 Punkte

Aufgabe 8: *(zum Simplexalgorithmus)*
Bei der Lösung des linearen Programms $\max\{c^\top x | Ax = b, x \geq 0\}$ ergebe sich folgendes Tableau (in der Version des Simplexalgorithmus, die in der Vorlesung vorgestellt wurde!).

α	-3	β	0	0	0	-10
γ	1	0	1	0	0	μ
-2	2	2	0	1	0	2
0	-1	2	0	0	1	3

Die augenblickliche Basis ist $B = 4, 5, 6$. Welche Voraussetzungen müssen an $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ gemacht werden, damit die folgenden Aussagen wahr sind:

i) B ist eine zulässige, aber nicht optimale Basis.

ii) Das Tableau zeigt, daß das Problem unbeschränkt ist.

iii) Wenn x_1 in die Basis aufgenommen wird, bleibt der Zielfunktionswert unverändert.

3+3+2 Punkte

Aufgabe 9: *(Rechnen)*
Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\max 13x_1 + 16x_2 - 18x_3 + 17x_4$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & \leq & 160 \\
4x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 160 \\
6x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & \leq & 160 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & = & 20 \\
 & & & & x_3 & - & x_4 & = & 20 \\
 & & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}$$

Tip: Zwei künstliche Schlupfvariablen sind genug. Vermeiden Sie Pivotelemente aus der ersten Spalte.

10 Punkte

Aufgabe 10: *(Kuhn-Tucker)*
Betrachten Sie folgendes nicht-lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x + \frac{1}{2} x^\top D x \\ & x^\top x \leq 1 \end{array}$$

wobei D eine positiv definite symmetrische Matrix sei.

i) Wie lauten die Kuhn-Tucker Bedingungen für eine Optimallösung für dieses Problem.

ii) Zeigen Sie: Ist $\|D^{-1}c\| \leq 1$, so ist $-D^{-1}c$ die Optimallösung des Programms. Ist $\|D^{-1}c\| > 1$, so ist $(-D - \lambda I)^{-1}c$ die Optimallösung, wobei $\lambda > 0$ der eindeutige Parameter mit $\|(-D - \lambda I)^{-1}c\| = 1$ ist.

Hinweis: Benutzt werden darf, daß unter den gegebenen Voraussetzungen jeder Kuhn-Tucker-Punkt schon das eindeutige globale Minimum ist. Beachten Sie: $\nabla(\frac{1}{2}x^\top Qx - q^\top x) = (Qx - q)^\top$. I ist die Einheitsmatrix.

4+6 Punkte

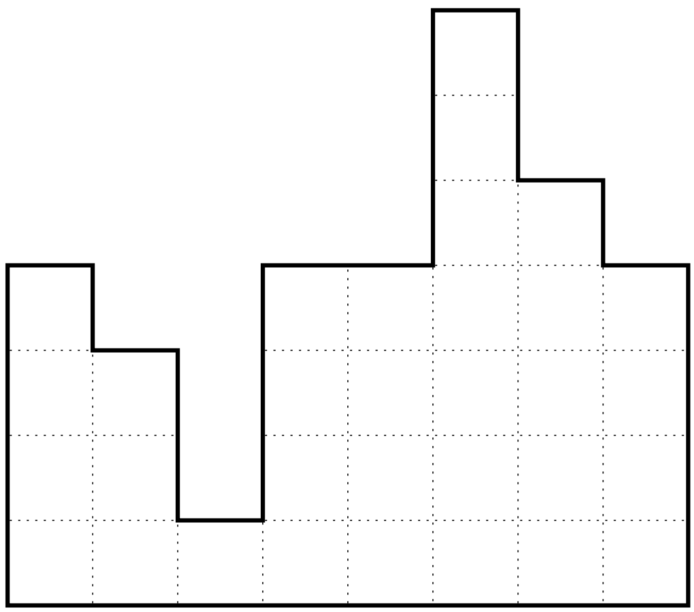
Aufgabe 11: *(Konvergenz)*
Betrachten Sie folgende Iteration:

$$x_{k+1} = 2x_k(1 - x_k) \qquad x_0 = 0.1$$

Zeigen Sie, daß die durch diese Vorschrift definierte Folge konvergiert, und bestimmen Sie die Ordnung der Konvergenz.

Tip: 2. Binomische Formel *7 Punkte*

Aufgabe 12: *(Recreational)*
Zerteilen Sie die folgende Figur in zwei deckungsgleiche Stücke, indem Sie nur entlang gepunkteter Linien schneiden.



5 Punkte