Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler
mit Dr. Th. Korb

Wintersemester 98/99

3. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Die durch die Rekursionsvorschrift

$$a_1 := a_2 := 1, \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

definierten Zahlen werden *Fibonaccizahlen* genannt. Benannt sind sie nach Leonardo von Pisa (1170–1250 ???), welcher besser unter dem Namen Fibonacci bekannt ist. Er entdeckte diese Zahlenreihe als Lösung zu folgendem Problem:

Angenommen ein Kaninchenpaar wird in einen Käfig gesperrt, um sich zu vermehren. Nehmen wir weiter an, daß Kaninchen zwei Monate nach ihrer Geburt erstmalig Junge werfen — jeweils ein Paar — und von da ab jeden Monat. Wenn keine Kaninchen sterben, wieviele Kaninchenpaare sind dann nach einem Jahr in dem Käfig?

Die Berühmtheit der Fibonaccizahlen beruht natürlich *nicht* auf dieser etwas dubiosen Aussage zur Kaninchenvermehrung, sondern auf ihrer Nützlichkeit für viele mathematische Problemstellungen und einer unglaublichen Fülle von interessanten Resultaten, welche im Laufe der Zeit über sie entdeckt worden sind. Aus Teil (a) dieser Aufgabe läßt sich z.B. leicht ableiten, daß $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1} = g$ ist, wobei g den *Goldenen Schnitt* bezeichnet, ein Teilverhältnis, welches in der Architektur der Antike und der italienischen Renaissance eine hervorragende Rolle spielte.

(a) Beweisen Sie folgendes überraschendes Ergebnis:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Das können Sie natürlich nur, weil Ihnen schon bekannt ist, welche Formel Sie beweisen sollen! Weiß man dies nicht, so würde man ein solches Problem z.B. durch Lösen der Rekursionsgleichungen mit der Methode der *erzeugenden Funktionen* angehen. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und besitzt die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$ einen positiven Konvergenzradius, so nennt man f die *erzeugende Funktion* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Im Falle der Fibonacci-Folge ergibt sich $f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}$ für $|x| < \frac{1}{2}$. Die Nullstellen des Polynoms x^2+x-1 sind $x_1 := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Durch weitere Analyse und Verwendung des *Identitätssatzes* für Potenzreihen erhält man dann die

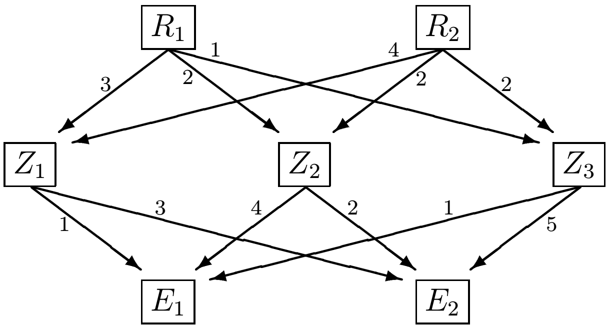
Formel in Teil (a). (Siehe: H. Heuser / Lehrbuch der Analysis / Teil 1 / B.G. Teubner Stuttgart / Kap. VIII.64.15.)

(b) In der Vorlesung wurde die Laufzeitfunktion des *euklidischen Algorithmus* zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen $m \geq n \geq 2$ betrachtet. Es wurde gezeigt, daß die Gesamtlaufzeit des Algorithmus durch $4(\log_2(m)+1)$ beschränkt ist. Überlegen Sie sich, daß diese Schranke mit Hilfe der Fibonaccizahlen verbessert werden kann.

Hinweis: Rufen Sie sich noch einmal den Beweis von *Beispiel 1.5.1* der Vorlesung ins Gedächtnis.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein Betrieb stellt 2 Endprodukte E_1, E_2 her, welche aus 2 Rohstoffen R_1, R_2 mittelbar über 3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 gewonnen werden. Der Materialverbrauch (in betriebsinternen Einheiten) für die verschiedenen Produktionsstufen wird durch folgendes Flußdiagramm wiedergegeben:



Ein Kunde bestellt nun 300 Einheiten E_1 und 100 Einheiten E_2. Berechnen Sie den Rohstoffbedarf, welcher für die Produktion dieser Bestellung notwendig ist.

Hinweis: Dies ist eine typische Aufgabe zur *Bedarfsrechnung*. Tip: Matrizen!

Aufgabe 3 (mdl.)

In der Vorlesung wurde definiert, wann eine Funktion *berechenbar* heißt. Es wurde auch gezeigt, daß es eine *nicht berechenbare* Funktion $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ gibt. Überlegen Sie sich, ob die Funktion

$$f = \begin{cases} 1, & \text{falls Gott existiert,} \\ 0, & \text{falls Gott } \textit{nicht} \text{ existiert.} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Beweisen Sie *Proposition 2.2.5* der Vorlesung (Transpositionsmatrizen sind selbstinvers; Charakterisierung von Permutationsmatrizen).