PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER
MIT DR. TH. KORB

Wintersemester 98/99

2. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Beweisen Sie *Satz 1.4.1* der Vorlesung (Rundung, absoluter Fehler, relativer Fehler).

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Wir wollen nun das Rechnen mit *kurzer Arithmetik* betrachten. (Leider gibt es hier keine allgemeingültigen Regeln bzw. Konzepte, sondern es muß in jedem Einzelschritt der Berechnung überprüft werden, daß dieser numerisch stabil ausgeführt wurde.)

(a) Berechnen Sie in 2-stelliger und in 3-stelliger Arithmetik zur Basis 10 den Ausdruck $x^3 \cdot 1000$ für $x = 10^{-1}$.

(b) Bekanntlich gilt: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$. Berechnen Sie in 4-stelliger Arithmetik zur Basis 10 die Ausdrücke $\sin(x)^2$ und $1 - \cos(x)^2$ für $x = 10^{-2}$ und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von Sinus und Kosinus.

(c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Wie Sie wissen, gelten für die *quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $|4ac| < b^2$ die Lösungsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2a}\big(-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\big), \quad x_2 = \frac{1}{2a}\big(-b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\big).$$

Wir betrachten nun den Fall: $|4ac| \ll b^2$. Überlegen Sie sich, warum hier bei der Berechnung von x_2 numerische Instabilität auftritt, wenn man mit kurzer Arithmetik arbeitet, wohingegen die Berechnung von x_1 relativ unproblematisch bleibt. Geben Sie eine andere Formel zur Berechnung von x_2 an, bei deren Auswertung der Fehler in der gleichen Größenordnung bleibt wie bei der Berechnung von x_1.

Hinweis: x_2 kann durch x_1 ausgedrückt werden.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Stellen Sie die Zinseszinsformeln für die folgenden Fälle auf:

(a) Sie zahlen bei einer Bank ein Startkapital x_0 auf ein Konto ein. Die Bank verzinst Ihnen dieses mit $p\%$ pro Jahr. Wieviel Geld x_n besitzen Sie nach n Jahren? Lösen Sie die Formel für x_n auch nach x_0, p und n auf.

(b) Sie gehen vor wie in Fall (a), vereinbaren mit der Bank jedoch eine jährliche Zuzahlung einer festen Summe Z beginnend mit dem Ablauf des ersten Jahres. Wie hoch ist nun ihr Kapital nach n Jahren?

Wer mag, der kann auch die Zinseszinsformel für den häufig auftretenden Fall einer festen Verzinsung mit *monatlicher* Zuzahlung aufstellen.

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion und — für (b) — ihr Wissen über die geometrische Reihe.

Aufgabe 4 (mdl.)

Viele bekannte kombinatorische Probleme beschäftigen sich mit *Dominosteinen*. Über die Geschichte des Dominospiels ist überraschend wenig bekannt. In der abendländischen Literatur gibt es erst ab der Mitte des 18. Jahrhunderts Hinweise darauf. In China war es schon viele Jahrhunderte früher bekannt (wenn auch in einer etwas anderen Version; s. z.B. Stewart Culins Buch *Games of the Orient* von 1895, welches 1958 von Charles Tuttle neu aufgelegt wurde). [Fällt Ihnen bei den beiden vorhergehenden Jahreszahlen etwas auf? Ist das Buch 1985 vielleicht noch einmal erschienen?] Das westliche Standardspiel besteht aus 28 Steinen, die alle möglichen Paarungen der Augenzahlen von Null bis Sechs zeigen. Wir wollen einen Satz *vollständig* nennen, wenn er alle Kombinationen von Doppel-Null bis Doppel-n für eine natürliche Zahl n enthält und darüber hinaus keine weiteren Steine. Eines der ältesten kombinatorischen Probleme mit Dominosteinen ist es, herauszufinden, auf wieviele verschiedene Arten ein vollständiger Satz in einer Reihe — den Dominoregeln entsprechend — aneinandergelegt werden kann. (Die Dominoregel besagt, daß sich berührende Steine an der Kontaktstelle mit den Augenzahlen übereinstimmen müssen.) Lassen wir den trivialen Satz, bestehend aus nur einem Stein, beiseite und betrachten den einfachsten vollständigen Satz ($n = 1$). Hier ergibt sich nur eine Reihe, nämlich $0-0, 0-1, 1-1$ und deren Umkehrung. Betrachten Sie die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Hinweis: Das Problem läßt sich formalisieren indem man Pfade in geeigneten Graphen betrachtet. Überlegen Sie sich dies. Es hat auch etwas mit dem berühmten *Königsberger Brückenproblem* zu tun. (Vielleicht finden Sie das selbst heraus. Ansonsten wird Ihr Übungsgruppenleiter es Ihnen schildern.) Im Fall $n = 3$ kann man übrigens eine sehr kurze Antwort mit Begründung geben!