PD Dr. W. Hochstättler
(mit Aufgaben von Dr. K. Plewe)

WS 98/99

Klausur zur Fachprüfung Mathematik des Vordiploms Wirtschaftsinformatik

Die Klausur ist in zwei Blöcke aufgeteilt. Die Aufgaben des ersten Blocks beinhalten Aufgaben aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker, der zweite Block Aufgaben aus der Algorithmische Mathematik. Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte, wobei in jedem Block mindestens 17 Punkte erreicht werden müssen. Als Hilfsmittel sind zugelassen Schreibstift, Lineal, 1 Taschenrechner ohne Software und ohne Datenbankfunktion sowie die Formelsammlung aus der Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker. **Man gebe stets Zwischenschritte an, die zur Lösung führen; Ergebnisse ohne ausreichende Begründung können nicht gewertet werden.**

Kreuzen Sie auf diesem Deckblatt die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an. Verwenden Sie ausschließlich das ausgegebene Klausurpapier. Verwenden Sie für jede Aufgabe eine neue Seite. Versehen Sie jedes Blatt links oben mit Ihrem Namen. Geben Sie am Ende der Klausur alle benutzten Blätter (inkl. Deckblatt und Schmierpapier) ab. Viel Erfolg!

Name: ____________________ Vorname: ____________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mathematik für Chemiker und Wirtschaftsinformatiker:

Aufgabe 1: *(lineare Abbildungen)*
Eine lineare Abbildung $f(x) = Ax$ werde durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

vermittelt. In welche Bilder werden hierbei überführt

i) der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

ii) die Ebene $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$?

iii) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren v, deren Bild der Nullvektor ist.

1+2+4 Punkte

Aufgabe 2: *(Determinante)*
Zeigen Sie, daß die Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ genau dann auf einer Geraden liegen, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6 Punkte

Aufgabe 3: *(Umkehrfunktion)*
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die definiert ist durch

$$f(x, y) := (8x - 3y, 5x - 2y),$$

eine umkehrbare Funktion ist. Geben Sie dazu eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, so daß $(g \circ f)(x, y) = (f \circ g)(x, y) = (x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5 Punkte

Aufgabe 4: *(Kurve)*
Betrachten Sie die Raumkurve

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

i) Beschreiben Sie die Kurve geometrisch und erläutern Sie dies anhand einer Skizze!

ii) Welche Kurve ergibt sich bei Projektion auf die XY-Ebene (auf die YZ- bzw. die ZX-Ebene)? Zeichnung anfertigen.

iii) Berechnen Sie $r'(t), |r'(t)|, |r(t)|', r''(t)$.

3+3+5 Punkte

Aufgabe 5: *(Vektorfelder)*
Gegeben seien die Vektorfelder

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - y \\ xz - x \\ xy + 1 \end{pmatrix}, \quad w(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix}$$

sowie die Raumkurve C mit der Darstellung $r(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in [0,1]$.

i) Untersuchen Sie jedes der beiden Vektorfelder, ob es konservativ ist!

ii) Bestimmen Sie im konservativen Fall eine zugehörige Potentialfunktion f.

iii) Berechnen Sie die Linienintegrale $\int_C v dr$, $\int_C w dr$. Nutzen Sie hierbei im konservativen Fall die in b) bestimmte Potentialfunktion.

5+3+4 Punkte

Aufgabe 6: *(Induktion)*

i) Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz durch vollständige Induktion.

ii) Sei $k \in \mathbb{N}$ eine feste Zahl. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k+i}{i} = \binom{k+n+1}{n}.$$

4+5 Punkte

Algorithmische Mathematik:

Aufgabe 7: *(Cholesky)*
Berechnen Sie die Cholesky-Faktorisierung der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 & 2 \\ 12 & 117 & 105 & 87 \\ 8 & 105 & 98 & 85 \\ 2 & 87 & 85 & 91 \end{pmatrix}.$$

6 Punkte

Aufgabe 8: *(Aufsatz)*
Beschreiben Sie die Vorgehensweise und begründen Sie ihre Korrektheit beim Simplex in folgenden Situationen (etwa je 1-3 Sätze!).

i) Spaltenauswahl

ii) Zeilenauswahl

iii) Stopkriterium für Optimallösung

3+3+3 Punkte

Aufgabe 9: *(Rechnen)*
Lösen Sie die folgende lineare Optimierungsaufgabe mit dem Simplexalgorithmus und verifizieren Sie die Lösung graphisch!

$$\begin{array}{llcll} & \max & 3x - 4y & & \\ \text{unter} & 5x & - \; 5y & \leq & 12 \\ & -9x & + \; 8y & \leq & 6 \\ & 1 \leq x \leq 2, & y \geq 0. & & \end{array}$$

Tip: **Eine künstliche** Schlupfvariable ist genug.

7+3 Punkte

Aufgabe 10: *(Nicht lineare Funktionen)*
Betrachten Sie die Funktion

$$h(x,y) = \frac{\cos(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}.$$

Zeigen Sie: h nimmt sein globales Maximum in $(0,0)$ an und die Menge *Extr* der lokalen Extremwerte von h ist gegeben durch

$$Extr = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(x^2+y^2) = -(1+x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)\} \cup \{0,0\}.$$

Beschreiben Sie den Graphen von h, also die Fläche $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x,y)\}$.

7+3 Punkte

Aufgabe 11: *(Konvergenz)*
Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $p_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

i) $d(p) := (-y - x, x - y)$ ist Abstiegsrichtung für $f \in p$.

ii) $\text{argmin}_\lambda f(p + \lambda d) = \frac{1}{2}$.

iii) Die Folge definiert durch $p_{n+1} := p_n + \frac{1}{2}d(p_n)$ konvergiert linear gegen das globale Minimum von f.

3+4+3 Punkte

Aufgabe 12: *(Recreational)*
Seien die Fibonaccizahlen durch durch $F_1 = 1, F_2 = 1$ und $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ für $k \geq 0$ definiert. Was ist

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} =?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung.

5 Punkte