Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler
mit Dr. Th. Korb

Wintersemester 98/99

9. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir wollen noch einmal bipartite Graphen betrachten (s. letzte Übungsserie). Ein wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist das sog. *matching*. Sei G ein bipartiter Graph mit Knotenmengen V_1 und V_2. Man spricht von einem *perfekten matching*, wenn jeder Knoten aus V_1 über eine Kante mit einem Knoten aus V_2 verbunden ist, ohne daß zwei Knoten aus V_1 demselben Knoten aus V_2 zugeordnet werden müssen. Sei V_1 z.B. eine Menge von Frauen und V_2 eine Menge von Männern. Eine Kante zwischen $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ soll bedeuten, daß die Frau v_1 den Mann v_2 heiraten könnte (weil sie sich kennen und mögen und die Familie nichts dagegen hat etc. etc.). Kann man nun alle Frauen verheiraten, so erhält man ein perfektes matching (wobei man je nach Definition eigentlich noch die verbleibenden Männer aus dem Graphen streichen müßte). Ist es nicht möglich, alle Frauen zu verheiraten und betrachtet man nur die maximale Anzahl von Frauen, welche verheiratet werden können, so erhält man den Begriff des *maximalen matching* (bzw. genauer: *kardinalitätsmaximales matching*). Maximales matching bedeutet also, daß man den größten Untergraphen von G betrachtet, in welchem man perfektes matching erhält. Folgender *Satz von König* beschreibt maximales matching:

$$\text{max. \# matching} \;=\; \text{min. \# Überdeckung.}$$

Gemeint ist hiermit, daß die Anzahl der Knoten aus V_1, welche zu einem maximalen matching gehören, mit der minimalen Anzahl der Knoten (aus V_1 und V_2) übereinstimmt, welche benötigt werden, damit jede Kante des gesamten Graphen mit einem dieser Knoten inzidiert (d.h. verbunden ist; diese Knoten *überdecken* also die Kantenmenge des Graphen). Betrachten Sie z.B. den bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ mit

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad V_2 = \{v_4, v_5, v_6\} \text{ und } E = \{(v_1, v_5), (v_2, v_4), (v_2, v_6), (v_3, v_5)\}.$$

Ein maximales matching wird hier z.B. durch die *zwei* Paare (v_1, v_5) und (v_2, v_4) gegeben. Und die *zwei* Knoten v_2 und v_5 inzidieren mit allen Kanten des Graphen (und man kann nicht weniger Knoten mit dieser Eigenschaft finden). Dies ist die Aussage des Satzes von König, welchen Sie nun beweisen sollen! Definieren Sie sich hierzu in geeigneter Weise zwei Vektorräume: einen *Knotenraum* und einen *Kantenraum* und überlegen Sie sich, wie die *Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix* des Graphen (s. letzte Übungsserie) zwischen diesen Vektorräumen als Abbildung funktioniert. Beschreiben Sie dann maximales matching in einem bipartiten Graphen durch ein lineares Programm. Dualisieren liefert dann die Aussage des Satzes von König.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe des Simplexverfahrens:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 10x_1 + 3x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 - 3x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & x_1 & \geq & 1 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Wie im Skript versprochen (neuer Skript, S. 48) wollen wir nun ein Beispiel für mögliches *Kreisen* (oder: *Zykeln*) des Simplexverfahrens betrachten:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2x_2 + 4x_4 + 4x_6 & & \\ \text{unter} & x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 6x_6 & = & 0 \\ & 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 & = & 0 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das zu $B = \{1, 2\}$ gehörige Tableau.

(b) Iterieren Sie (Simplexverfahren) unter Verwendung der *Steilster-Anstieg-Regel* (s. neuer Skript §3.6), bis Kreisen eintritt.

(c) Überlegen Sie sich, wie man das Kreisen verhindern kann.

Zusatzaufgabe: *(mdl.)* Stellen Sie unter Verwendung des dualen Programms die einzelnen Iterationsschritte graphisch dar.

Aufgabe 4 (mdl.)

Die drei Mathematiker <u>A</u>lfred, <u>B</u>ill und <u>C</u>harley gehen an jedem Werktag gemeinsam zum Mittagessen. Irgendwann stellten Sie fest, daß ihre Gewohnheit einen Martini zu trinken durch folgende Regeln beschrieben werden kann:

1) Wenn Alfred einen Martini bestellt, dann macht Bill das auch.

2) Entweder Bill oder Charley bestellt einen Martini, aber nie beide beim gleichen Mittagessen.

3) Alfred oder Charley oder beide bestellen immer einen Martini.

4) Wenn Charley einen Martini bestellt, dann macht Alfred das auch.

Können Sie einfacher sagen, wer wann einen Martini trinkt?

Tip: Es gibt sicherlich viele Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen. Eine elegante Lösung erhält man jedoch durch Verwendung sog. *Venn-Diagramme.* Das sind diese Kreise, welche die meisten von Ihnen wahrscheinlich schon im Mengenlehre-Unterricht der Grundschule gezeichnet haben. Identifizieren Sie *'Martini bestellen'* mit *wahr* und *'keinen Martini bestellen'* mit *falsch* und zeichnen Sie dann geeignete Venn-Diagramme.