Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler
mit Dr. Th. Korb

Wintersemester 98/99

8. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Dualisieren Sie die beiden folgenden linearen Programme:

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (b) \quad \begin{array}{ll} \min & u^T b \\ \text{unter} & u^T A \geq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$$

(Notation wie in der Vorlesung.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie *Übung 3.3.5* des *neuen* Skripts:

Das duale Programm des dualen Programms ist das primale Programm. Folgern Sie hieraus: Ist das primale Programm zulässig und beschränkt, so gibt es für beide Programme Optimallösungen x^* *und* y^* *und es gilt:* $c^T x^* = y^{*T} b$.

Diskutieren Sie ebenfalls den Unterschied zu Satz 3.3.3 (a) der Vorlesung.

Hinweis: Bringen Sie das duale Programm in Standardform und dualisieren Sie.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Wahrscheinlich wissen Sie alle, was ein *Graph* ist. Er besteht aus *Knoten* und *Kanten*. (In einer früheren Übungsserie haben wir schon einmal Graphen betrachtet; und zwar hinsichtlich der Lösung des Problems mit den Dominosteinen!) Formal ist ein Graph G ein geordnetes Paar von disjunkten Mengen (V, E), so daß E eine Untermenge der Menge der ungeordneten Paare von Elementen aus V ist. Ist G ein Graph, so nennt man $V = V(G)$ die Menge der Knoten und $E = E(G)$ die Menge der Kanten von G. (Die Bezeichnungen stammen natürlich aus dem Englischen: set of *vertices*, set of *edges*.) Ist $e = (v_1, v_2) \in E$, so heißt dies, daß e eine Kante ist, welche die Knoten v_1 und v_2 miteinander verbindet. Das folgende ist ein Beispiel für einen einfachen Graphen mit 5 Knoten und 4 Kanten:

$$\begin{array}{lllll} v_1 & e_1 & v_2 & e_2 & v_3 \\ \text{o} & \text{—} & \text{o} & \text{—} & \text{o} \\ \mid e_3 & & \mid e_4 & & \\ \text{o} & & \text{o} & & \\ v_4 & & v_5 & & \end{array}$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung von Graphen ist die sogenannte *(Knoten–Kanten)–Inzidenzmatrix.* Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, so ist die Inzidenzmatrix von G die $n \times m$ Matrix A, welche gegeben ist durch:

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls zu dem Knoten } v_i \text{ die Kante } e_j \text{ hinführt,} \\ 0, & \text{falls zu dem Knoten } v_i \text{ die Kante } e_j \textit{ nicht} \text{ hinführt.} \end{cases}$$

Wir wollen nun spezielle Graphen betrachten. Ein Graph G heißt *bipartit* mit Knotenmengen V_1, V_2, wenn $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt und jede Kante einen Knoten aus V_1 mit einem Knoten aus V_2 verbindet. Es werden also keine Knoten von V_1 untereinander verbunden. Das gleiche gilt für Knoten aus V_2. (Wenn Sie auf ein Blatt Papier verschiedene Mädchen und Jungen malen und jedes Mädchen mit jedem Jungen verbinden, den sie schon einmal geküsst hat, dann erhalten Sie einen bipartiten Graphen. Etwas albern vielleicht, aber in der Literatur werden viele Probleme und Ergebnisse zu bipartiten Graphen über solche Mädchen–Junge, Mann–Frau Beziehungen verdeutlicht!) Lösen Sie nun folgende Aufgaben:

(a) Stellen Sie die Inzidenzmatrix zu obigem Beispiel (Graph mit 5 Knoten und 4 Kanten) auf.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Inzidenzmatrix eines Graphen mit 3 Knoten, welche alle durch Kanten miteinander verbunden sind. (Der Graph sieht also wie ein Dreieck aus!)

(c) Überlegen Sie sich, daß alle Unterdeterminanten der Inzidenzmatrix eines *bipartiten* Graphen den Wert 0, 1 oder -1 haben. (Solche Matrizen nennt man *total unimodular.*)

Bemerkung: Warum die Determinanten von Inzidenzmatrizen für uns interessant sind, sehen Sie in der nächsten Aufgabe, welche in der kommenden Übungsserie wieder aufgegriffen wird!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei A eine reguläre Matrix. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ und nehmen an, daß die Komponenten von b alle ganzzahlig sind. Zeigen Sie nun: Falls A die Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist, dann ist obiges Gleichungssystem ganzzahlig lösbar.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, was Determinanten mit dem Lösen von linearen Gleichungssystemen bzw. inversen Matrizen zu tun haben und benutzen Sie dann Aufgabe 3 (c).

Aufgabe 5 (mdl.)

Viele Zaubertricks und Rechenkunststücke beruhen auf sogenannten *zyklischen Zahlen.*

Hierunter versteht man eine natürliche Zahl mit n Stellen (führende Nullen werden zugelassen und als Stellen mitgezählt!), welche folgende ungewöhnliche Eigenschaft hat: Wenn die Zahl mit einer natürlichen Zahl von 1 bis einschließlich n multipliziert wird, so enthält das Produkt die *gleichen* n Ziffern der ursprünglichen Zahl in *derselben* zyklischen Reihenfolge. (Die Ziffern der Zahl werden bei der Multiplikation also nur zyklisch permutiert.) Die einfachste zyklische Zahl ist natürlich die 1. Können Sie die nächste zyklische Zahl finden? Diese hat übrigens keine führende Null (ist also eine *echte* natürliche Zahl). Außer der trivialen 1 ist sie aber auch die einzige zyklische Zahl ohne führende Null. (Sie werden sehen, warum!) Alle Methoden sind zugelassen: Computer, theoretischer Ansatz oder einen Zauberer fragen. Von letzteren wird Ihnen wahrscheinlich fast jeder die Zahl nennen können, da sie in deren Kreisen extrem bekannt ist.