PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER
MIT DR. TH. KORB

Wintersemester 98/99

7. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Das *Farkas' Lemma* der Vorlesung wird oft in folgender äquivalenter Formulierung angegeben:

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$ *gegeben. Dann gilt*

entweder (a) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b$,

oder (b) $\exists u \in \mathbb{R}^m_+ : u^T A = 0$ *und* $u^T b < 0$,

aber nicht beides.

Leiten Sie diese Form des *Farkas' Lemmas* aus der Ihnen bekannten her.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Aussage der *Übung 3.1.6* des Skripts:

Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform ist ein Polyeder.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[p, q]$ die *Verbindungsstrecke* zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$[p, q] := \{(1-\lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}.$$

Wir sagen, eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $p, q \in K$ auch $[p, q] \subset K$ gilt. Beweisen Sie nun folgenden Satz:

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ *konvex und sind* $p_0, \ldots, p_k \in K$, *so enthält* K *jede Konvexkombination* $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k$.

Hinweis: Erinnern Sie sich: Konvekkombination heißt, daß $\lambda \geq 0$ und $\lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1$ gilt. Führen Sie Induktion nach k durch.

Aufgabe 4 (mdl.)

Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier 3 Häuser, ein Kraftwerk, ein Gaswerk und einen Wasserturm. Jedes der Häuser soll nun mit allen 3 Versorgern verbunden werden (angedeutet durch einen Strich oder eine Kurve mit dem Stift), jedoch so, daß sich die Verbindungslinien *nicht* überschneiden! *(Grund: Der Boden in dieser Gegend ist ab einer geringen Tiefe schon sehr hart und man kann Rohre nicht übereinander* *verlegen. So eine Situation trifft man z.B. in Helsinki/Finnland an. Die Stadt ist quasi auf Granit gebaut.)* Ist dieses Problem *planar* (d.h. auf Ihrem Blatt Papier) lösbar?

Zusatz: Was wäre, wenn Helsinki sich nicht in Finnland sondern auf einem *Möbiusband* befinden würde? Natürlich gehen wir auch hier davon aus, daß es in Helsinki nur 3 Häuser und 3 Versorger gibt!