

---

## 7. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

---

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Das *Farkas' Lemma* der Vorlesung wird oft in folgender äquivalenter Formulierung angegeben:

Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$  gegeben. Dann gilt

entweder (a)  $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b$ ,

oder (b)  $\exists u \in \mathbb{R}_+^m : u^T A = 0$  und  $u^T b < 0$ ,

aber nicht beides.

Leiten Sie diese Form des *Farkas' Lemmas* aus der Ihnen bekannten her.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Aussage der *Übung 3.1.6* des Skripts:

*Der zulässige Bereich eines linearen Programms in Standardform ist ein Polyeder.*

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $[p, q]$  die *Verbindungsstrecke* zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$[p, q] := \{(1 - \lambda)p + \lambda q \mid \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1\}.$$

Wir sagen, eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  sei *konvex*, wenn mit je zwei Punkten  $p, q \in K$  auch  $[p, q] \subset K$  gilt. Beweisen Sie nun folgenden Satz:

*Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex und sind  $p_0, \dots, p_k \in K$ , so enthält  $K$  jede Konvexkombination  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$ .*

**Hinweis:** Erinnern Sie sich: Konvexkombination heißt, daß  $\lambda \geq 0$  und  $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$  gilt. Führen Sie Induktion nach  $k$  durch.

### Aufgabe 4 (mdl.)

Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier 3 Häuser, ein Kraftwerk, ein Gaswerk und einen Wasserturm. Jedes der Häuser soll nun mit allen 3 Versorgern verbunden werden (angedeutet durch einen Strich oder eine Kurve mit dem Stift), jedoch so, daß sich die Verbindungslinien *nicht* überschneiden! (*Grund: Der Boden in dieser Gegend ist ab einer geringen Tiefe schon sehr hart und man kann Rohre nicht übereinander*

*verlegen. So eine Situation trifft man z.B. in Helsinki/Finnland an. Die Stadt ist quasi auf Granit gebaut.) Ist dieses Problem planar (d.h. auf Ihrem Blatt Papier) lösbar?*

**Zusatz:** Was wäre, wenn Helsinki sich nicht in Finnland sondern auf einem *Möbiusband* befinden würde? Natürlich gehen wir auch hier davon aus, daß es in Helsinki nur 3 Häuser und 3 Versorger gibt!