Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler
mit Dr. Th. Korb

Wintersemester 98/99

# 6. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

**Aufgabe 1** (6 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *orthogonale* Matrix. Zeigen Sie, daß gilt: $||A||_2 = 1$.

**Bemerkung:** Benutzen Sie bitte nur die Definitionen von $||\_||_2$ und orthogonalen Matrizen. Weitere Ergebnisse sind nicht notwendig!

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von *Satz 2.6.4* der Vorlesung (unter den dort angenommenen Voraussetzungen).

*Seien $x$ und $x+\Delta x$ Lösungen der Systeme $Ax = b$ bzw. $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$. Dann läßt sich der relative Fehler abschätzen durch:*

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \frac{\mathrm{cond}(A)}{1 - \mathrm{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left( \frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta b||}{||b||} \right).$$

**Bemerkung:** Im Gegensatz zu *Satz 2.6.4* lassen wir hier also auch eine fehlerbehaftete rechte Seite des Gleichungssystems zu.

**Aufgabe 3** (12 Punkte)

**Modellbildung:** Das Ende der Prohibition in Amerika stellte die *'Familie'* vor das Problem, das nun legale Alkoholgeschäft nach marktwirtschaftlichen Grundsätzen zu betreiben. Glücklicherweise hatte der Pate seinen Sohn in weiser Voraussicht Wirtschaftsinformatik studieren lassen. Da es leider noch nicht viele Computer gab, war dieser natürlich arbeitslos, aber sein theoretisches Wissen konnte er nun sinnvoll in die Familiengeschäfte einbringen. Im Lagerhaus der Familie fand er neben den üblichen Mafiautensilien (Beton, Maschinenpistolen, etc.) noch 2000 Flaschen Whisky der Marke Winfriddich, 2500 Flaschen Korbelschnaps und 1200 Flaschen 50-prozentiger Brennspiritus. Nach einer feuchtfröhlichen Marktanalyse (in verschiedenen Bars und Kneipen) sah der Sohn des Paten keine großen Absatzchancen für diese Originalprodukte. Daher beschloß er, durch Mischen die neuen Whiskysorten Winnie Talker, Blonde Beauty und Simple produzieren zu lassen, welche zu 22.5 cts, 28.5 cts bzw. 34 cts pro Flasche verkauft werden sollten. Als Wiederbeschaffungspreis für die Ausgangsprodukte Winfriddich, Korbelschaps und Brennspiritus konnte er 35 cts, 25 cts bzw. 20 cts pro Flasche ermitteln. Auf einigen Familienfeiern wurden durch exzessives Probieren folgende Vorgaben für die Mischungsverhältnisse festgelegt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Winnie Talker | wenigstens | 60% | Winfriddich |
| | höchstens | 20% | Brennspiritus |
| Blonde Beauty | wenigstens | 15% | Winfriddich |
| | höchstens | 60% | Brennspiritus |
| Simple | höchstens | 50% | Brennspiritus |

Absatzschwierigkeiten waren auf Grund der langjährigen guten Kontakte in der Alkoholbranche und einem familieneigenen Talent, Kunden mit *handfesten* Argumenten zu überzeugen, nicht zu befürchten. Wie sah das Lineare Programm aus, das der Sohn des Paten für dieses Problem im Hinblick auf eine Gewinnmaximierung (Erlös – Wiederbeschaffungspreis) aufstellte?

**Bemerkung:** Leider konnte die Familie dann doch nicht im legalen Alkoholgeschäft Fuß fassen, da der Sohn des Paten sein Studium abgebrochen hatte, bevor er lernen konnte, wie man ein solches Lineares Programm löst!

### Aufgabe 4 (mdl.)

In folgendes Schema soll eine 10-stellige Zahl eingetragen werden, welche sich in folgendem Sinne selbst beschreibt: Die Ziffer im Feld $n$ soll angeben, wie oft die Ziffer $n$ in der Zahl selbst vorkommt. Steht also z.B. eine 3 im Feld 5, so muß die 5 dreimal in der Zahl als Ziffer vorkommen.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Wieviele Lösungen existieren zu diesem Problem und wie lauten sie?

**Hinweis:** Natürlich könnten Sie ein Computerprogramm schreiben, welches alle möglichen Zahlen daraufhin überprüft, ob sie sich in obiger Art und Weise selbst beschreiben. Aber das sind immerhin 10 Milliarden Zahlen und das Erstellen des Programms ist auch ein gewisser Zeitaufwand. Eine Lösung mit Papier und Bleistift (bei geeignetem systematischen Ansatz) sollte deutlich schneller zu erreichen sein.