PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER
MIT DR. TH. KORB

Wintersemester 98/99

5. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ wurde in der Vorlesung folgende Notation eingeführt:

(i) $||x||_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$,

(ii) $||x||_2 := \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,

(iii) $||x||_\infty := \max_{1 \le i \le n}\{|x_i|\}$.

Beweisen Sie, daß dies tatsächlich *Normen* sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie folgenden Satz, welcher besagt, daß alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ auf eine gewisse Art und Weise zueinander äquivalent sind.

Für jedes Paar von Normen $n_1(x)$, $n_2(x)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) existieren Konstanten $k, K > 0$, so daß gilt:

$$k \cdot n_2(x) \le n_1(x) \le K \cdot n_2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (bzw.\ \mathbb{C}^n).$$

Im Beweis dürfen Sie benutzen, daß jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ eine (gleichmäßig) *stetige* Funktion bzgl. der Metrik $\rho(x,y) := \max_{1 \le i \le n}\{|x_i - y_i|\}$ ist. (Wer mag, der sollte sich auch einmal den Beweis für diesen Satz überlegen.)

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $n_2(x) := ||x||_1$. Die Menge $M := \{x \in \mathbb{C}^n | \max_i\{|x_i|\} = 1\}$ ist eine *kompakte* Teilmenge des $\mathbb{C}^n$. Da $n_1(x)$ *stetig* ist, existieren somit...

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, welche der beiden folgenden symmetrischen Matrizen *positiv definit* ist.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sollte eine der Matrizen positiv definit sein, so bestimmen Sie deren Cholesky-Faktorisierung und lösen Sie auf diesem Wege das folgende Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

wobei A die positiv definite Matrix aus (a) bzw. (b) bezeichnet.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \qquad \text{mit} \qquad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie dieses mit 2-stelliger Arithmetik, indem Sie die Gaußsche Eliminationsmethode durchführen. Wählen Sie einmal a_{11} und einmal a_{21} als Pivotelement im 1. Schritt. Vergleichen Sie die Lösungen, welche Sie so erhalten! (Dieses Beispiel illustriert *Bemerkung 2.2.11* im Skript!)

Aufgabe 5 (mdl.)

Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie die Wurzel aus einer Zahl bestimmen sollten (z.B. $\sqrt{2}$) und nicht die gleichsam magischen Fähigkeiten eines Taschenrechners mit Wurzeltaste zur Verfügung hätten? Einem sehr alten Verfahren *(Heron-Verfahren)* zur Lösung dieses Problems liegt folgende geometrische Idee zu Grunde:

Versuche ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt n ist. Die Seitenlänge dieses Quadrates ist dann $\sqrt{n}$. Starte mit einem Rechteck, welches die Seitenlängen $a_0 = n$ und $b_0 = 1$ hat. Dessen Flächeninhalt ist natürlich n. Konstruiere nun ein neues Rechteck, dessen eine Seite die Länge $a_1 =$ arithmetisches Mittel aus a_0 und b_0 *hat und dessen andere Seite eine Länge b_1 hat, welche so gewählt wird, daß das Rechteck wieder einen Flächeninhalt von n aufweist. Fahre nun so fort und konstruiere auf diese Weise immer neue Rechtecke. Diese nähern sich immer mehr dem gesuchten Quadrat.*

Man erhält also zwei Folgen (a_i) und (b_i). Zeigen Sie, daß diese von oben bzw. von unten gegen $\sqrt{n}$ konvergieren und eine Intervallschachtelung für den gesuchten Wert liefern.

Bemerkungen: Man kann bei diesem Verfahren sehr schön sehen, auf wieviele Stellen genau man die gesuchte Wurzel schon berechnet hat! (Woran?) Außerdem konvergieren die beiden Folgen sehr schnell gegen den gesuchten Wert.