PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER
MIT DR. TH. KORB Wintersemester 98/99

4. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie eine LU–Zerlegung durch und lösen Sie dann zur Kontrolle das Gleichungssystem mit Hilfe dieser Zerlegung.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

INPUT-OUTPUT-ANALYSE [nach W. Leontief].

Eine Volkswirtschaft bestehe aus n Wirtschaftszweigen (oder: *Sektoren*). Jeder dieser Sektoren bezieht in einer solchen Volkswirtschaft Güter oder Leistungen aus anderen Sektoren (*Input*) und gibt wiederum selbst Güter oder Leistungen an andere Sektoren ab (*Output*).

Die Produktion x_i des i-ten Sektors setzt sich wie folgt zusammen:

- x_{ii} := der Teil von x_i, welcher im Sektor i selbst benötigt wird.
- x_{ij} := der Teil von x_i, welcher in den Sektor j geht ($i \neq j$).
- y_i := der Teil von x_i, welcher die Volkswirtschaft verläßt, also konsumiert oder exportiert wird. (Kurz: *Konsum.*)

Es gilt also: $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$.

Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß die benötigten Inputs der Sektoren linear vom Output abhängen, d.h.:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Die Koeffizienten a_{ij} heißen die *Verbrauchskoeffizienten* und die $(n \times n)$–Matrix $A := (a_{ij})$ die *Verflechtungsmatrix* der Volkswirtschaft.

Es sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 \end{smallmatrix} \right)$ die Verflechtungsmatrix einer *sehr kleinen* Volkswirtschaft, welche nur aus 2 Sektoren besteht. Für die nächste Planungsperiode wird ein Konsum von $y_1 = 10$ und $y_2 = 30$ geschätzt. Berechnen Sie, welche Produktion x_1, x_2 notwendig ist um diesen Konsumbedarf zu befriedigen.

Die oben vorgestellte Input-Output-Analyse läßt sich natürlich statt auf eine Volkswirtschaft auch auf einen einzelnen Betrieb anwenden, welcher aus mehreren Sektoren (z.B. Abteilungen) besteht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Durch die *symmetrische* Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

wird eine *quadratische Form* $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diagonalisieren Sie A durch geeignete Koordinatentransformation, d.h. bringen Sie Φ auf eine Gestalt, in welcher nur noch rein quadratische Terme auftreten.

Hinweis: Erinnern Sie sich, daß die quadratische Form Φ durch den Ausdruck $x^T Ax$ für $x \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Schreiben Sie Φ konkret hin und führen Sie eine *quadratische Ergänzung* durch.

Aufgabe 4 (mdl.)

In der letzten Übungsserie haben Sie die *Fibonaccizahlen* kennengelernt. Wenn Sie nun vor die Aufgabe gestellt würden, diese in einem Computerprogramm zu implementieren, dann könnten Sie folgende Prozedur schreiben, welche an Einfachheit und Transparenz kaum zu überbieten ist:

```
fib := proc(n)
begin
if n<2 then n else fib(n-1)+fib(n-2) end_if;
end_proc:
```

(Die Notation hier entspricht dem Computeralgebrasystem MuPAD, sollte aber selbsterklärend sein.) Überlegen Sie sich, warum diese Implementierung der Fibonaccizahlen problematisch ist und finden sie andere Möglichkeiten, die Fibonaccizahlen einem Programm als Prozedur zur Verfügung zu stellen.

Hinweis: Wer einen Computer oder programmierbaren Taschenrechner hat, der sollte obige Prozedur einmal programmieren und z.B. durch inkrementieren einer globalen Variablen überprüfen, wie oft die Prozedur sich selbst aufruft für n = 1,2,3, ...

Nachtrag: Fibonaccizahlen haben übrigens mehr mit Drohnen (männliche Bienen) zu tun als mit Kaninchen. Eine Drohne hat nämlich keinen Vater. Somit gestaltet sich die Ahnenreihe einer

Drohne wie folgt: 1 Elternteil (seine Mutter), 2 Großeltern (die Eltern der Mutter), 3 Urgroßeltern (weil der Vater der Mutter keinen Vater hatte), 5 Ururgroßeltern und so weiter in der Fibonaccifolge.