PRIV.-DOZ. DR. W. HOCHSTÄTTLER
MIT DR. TH. KORB

Wintersemester 98/99

11. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Die Funktionen $f, g : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (S offen) mögen in $x \in S$ Gradienten besitzen. Dann trifft dies auch für $f+g$, fg, αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) und f/g (falls $g(x) \neq 0$) zu. Zeigen Sie nun, daß die folgenden Formeln gelten (wobei als Argument jeweils x zu ergänzen ist):

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ (b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(c) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f$ (d) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Stellen Sie die Hessematrix der Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ auf dem $\mathbb{R}^2$ auf.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Geben Sie eine Parametrisierung für eine *Zykloide* an. *(Die Zykloide beschreibt die Bahn eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises (vom Radius r), wenn letzterer auf der positiven x-Achse der $x-y$-Ebene abrollt und besagter Punkt sich zu Beginn der Bewegung im Nullpunkt befand. Oder anders: Der Weg eines Nagels in einem Autoreifen (vorausgesetzt der Reifen wird nicht kleiner, weil er Luft verliert)!)*

Aufgabe 5 (mdl.)
Zeichnen Sie auf ein Blatt Papier eine 4×4-Matrix und schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 16 von links nach rechts, angefangen mit dem Feld $(1,1)$ in die Matrix. (In der ersten Zeile steht also $1,2,3,4$, in der zweiten steht $5,6,7,8$ etc.) Wählen Sie nun ein beliebiges Feld der Matrix und kreisen Sie die Zahl dort ein. Ziehen Sie nun einen vertikalen Strich durch die Spalte, in der die eingekreiste Zahl steht und einen horizontalen Strich durch die entsprechende Reihe. Kreisen Sie dann eine der verbleibenden Zahlen ein (also eine, welche noch nicht durchgestrichen

ist) und ziehen Sie wieder die entsprechenden vertikalen und horizontalen Striche. Nun wiederholen Sie dieses Verfahren noch einmal und zuletzt kreisen Sie die einzig übriggebliebene Zahl ein. Wenn man nun die 4 eingekreisten Zahlen addiert, so ergibt sich als Summe 34. Warum?

Wenn Sie erst einmal verstanden haben, wie dieser Trick funktioniert, dann können Sie sich beliebig viele Variationen davon ausdenken. Versuchen Sie es einmal!

Aufgabe 6 (mdl.)

Magische Quadrate kann man natürlich noch auf die Spitze treiben. Wer mag, der versuche einmal einen *magischen Würfel* zu konstruieren (z.B. einen $3\times3\times3$-Würfel; hier müssen Sie die Zahlen von 1 bis 27 so auf die Felder verteilen, daß sich in alle Richtungen (auch auf den Diagonalen!) immer die gleiche Summe ergibt).

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!!!