Priv.-Doz. Dr. W. Hochstättler
mit Dr. Th. Korb

Wintersemester 98/99

10. Übungsserie zur Algorithmischen Mathematik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Lösen Sie folgendes Problem mit Hilfe der *Zweiphasenmethode*:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{min} & 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\ \text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In der Praxis ist es oftmals so, daß die Variablen in linearen Programmen sowohl unteren als auch *oberen Schranken* unterliegen. (Z.B. ist der Grad einer Produktion durch die Kapazitäten der Fabrik beschränkt bzw. die Menge der verfügbaren Rohstoffe durch Transportkapazitäten etc. etc.) Also gelten üblicherweise folgende Einschränkungen für eine Variable x_i in einem linearen Programm:

$$u_i \leq x_i \leq o_i \qquad (u_i = \underline{\text{u}}\text{ntere Schranke},\ o_i = \underline{\text{o}}\text{bere Schranke}).$$

Überlegen Sie sich, daß jedes lineare Programm mit unteren und oberen Schranken für die Variablen (üblicherweise *Lineares Programm mit oberen Schranken* genannt) z.B. in die folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & c^T x \\ \text{unter} & Ax = b \\ & 0 \leq x \leq s \end{array}$$

Überlegen Sie sich nun, wie die obige Form in die übliche *Standardform* überführt werden kann (Tip: *Schlupfvariablen*), auf welche dann das normale Simplexverfahren anwendbar ist. Wie groß wird die Matrix des so erhaltenen linearen Programms in Standardform?

In den Übungen werden Sie eine effektivere Methode (leicht modifizierte Form des Simplexverfahrens) kennenlernen, um lineare Programme mit oberen Schranken zu lösen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Redundanz in linearen Programmen. Wir betrachten ein System von linearen Ungleichungen in Standardform:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Folgende 3 Fälle von *Redundanz* können in diesem System auftreten:

(1) *Redundante Gleichungen:* Eine der Gleichungen kann als Linearkombination der anderen ausgedrückt werden.

(2) *Null-Variablen:* Eine Variable x_i ist in allen Lösungen des Systems gleich Null.

(3) *Nicht-extremale Variablen:* Für eine Variable x_i ist die Ungleichung $x_i \geq 0$ redundant (d.h. es ergibt sich schon aus den Gleichungen, daß $x_i \geq a$ für ein $a > 0$ gelten muß).

Beantworten Sie nun folgende Fragestellungen:

(a) Gibt es Null-Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Gibt es nicht-extremale Variablen in dem folgenden System?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & & & x & \geq & 0 \end{array}$$

(c) Wie kann man ein System von linearen Ungleichungen in Standardform, in welchem einer der obigen Fälle von Redundanz auftritt, vereinfachen? Wie sieht eine solche Vereinfachung für (a) und (b) aus?

Aufgabe 4 (mdl.)

Sie erholen sich in einem Ruderboot auf einem kreisrunden See. Plötzlich entdecken Sie am Ufer einen Mathematiker mit einer neuen Übungsserie, welche er Ihnen aufdrängen will! Nach einiger Zeit der Beobachtung kommen Sie zu dem Schluß, daß der Mathematiker wohl Nichtschwimmer ist, aber genau viermal so schnell laufen kann, wie Sie rudern. Er kann aber nicht so schnell laufen wie Sie. Könnten Sie also mit dem Boot eine Stelle des Ufers erreichen, ohne dort den Mathematiker mit der Übungsserie zu treffen, so wären Sie gerettet, da Sie schneller laufen können als er!

Können Sie einen Weg finden, wie Sie einen Punkt des Ufers vor dem Mathematiker erreichen?