Die folgende Matrix X_F liefert mit $(I_3|X_F)$ eine Darstellung von F_7:

$$X_F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition ist Satz 5.1.2 äquivalent zu:

Satz 5.1.4 *Sei X eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

1. *X hat keine total unimodulare Vorzeichenbelegung.*
2. *Betrachtet man die Matrix $(I_m|X)$ über $GF(2)$, so kann sie durch eine Kombination der Operationen Löschen einer Zeile oder Spalte, Permutation von Zeilen oder Spalten und Pivotieren in $(I_3|X_F)$ oder $(I_4|X_F^\top)$ überführt werden.*

Diesen letzten Satz wollen wir nun mit Hilfe mehrerer Lemmata beweisen.

Lemma 5.1.5 *Sei G ein einfacher, zusammenhängender, bipartiter Graph mit der Eigenschaft, daß jedes Paar von Knoten gleicher Farbklasse einen Knotenschnitt bildet. Dann ist G ein Pfad oder ein Kreis.*

Beweis. Ist G weder ein Pfad noch ein Kreis, so hat G einen aufspannenden Baum, der kein Pfad ist. Darin gibt es zwei Blätter in der gleichen Farbklasse. $\square$

Lemma 5.1.6 *Sei D eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen in $\{0, 1, -1\}$. Ist $G(D^\#)$ ein Kreis, dann ist D total unimodular genau dann, wenn die Anzahl negativer Einträge in D die gleiche Parität wie n modulo 2 hat.*

Beweis. Da Permutation von Zeilen oder Spalten höchstens das Vorzeichen der Determinante ändert, dürfen wir annehmen, daß

$$D^\# = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hat man eine echte quadratische Untermatrix von D, so entspricht dieser ein echter Teilgraph von $G(D^{\#})$ enthält also eine Zeile oder Spalte mit nur einem Nichtnulleintrag. Induktiv folgt sofort, daß jede echte Untermatrix von D Determinante $0, 1$ oder -1 hat. Wir müssen also nur die Determinante von D untersuchen. Durch abwechselndes Skalieren von Zeilen und Spalten erhalten wir $|\det(D)| = |\det(D_1)|$ mit

$$D^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d_{1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $d_{1,n} \in \{+1, -1\}$. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert: $\det(D_1) = 1+(-1)^{n+1}d_{1,n}$. Die Behauptung folgt nun leicht mittels Induktion über die Anzahl der -1en in D $\square$

Lemma 5.1.7 *Seien D_1 und D_2 total unimodulare Matrizen mit $D_1^{\#} = D_2^{\#}$. Dann entsteht D_2 aus D_1 durch Multiplikation einiger Zeilen und Spalten mit -1.*

Beweis. Wir versehen die Kanten des Graphen $G(D_1^{\#}) = G(D_2^{\#})$ mit Vorzeichen und zwar die Kante (ij) mit $\sigma(ij) = (D_1)_{ij} * (D_2)_{ij}$. Zunächst zeigen wir, daß für jeden Kreis C in $G(D_1^{\#})$ gilt:

$$\prod_{e \in C} \sigma(e) = 1.$$

Wir beweisen das über die Anzahl k der Sehnen von C. Im Fall $k = 0$ betrachten wir die von den Knoten der Untermatrix des Kreises induzierten Matrizen. Dann folgt aus Lemma 5.1.6:

$$\prod_{ij \in C} (D_1)_{ij} = \prod_{ij \in C} (D_2)_{ij} = (-1)^n$$

und somit die Induktionsvoraussetzung. Ist nun $k > 0$ und f eine Sehne in C, so zerteilt f den Kreis C in C_1 und C_2, so daß $C_1 \cup f$ und $C_2 \cup f$ Kreise sind, die beide weniger Sehnen als C haben. Nach Induktionvoraussetzung erhalten wir also

$$1 = \prod_{e \in C_1 \cup f} \sigma(e) * \prod_{e \in C_2 \cup f} \sigma(e) = \sigma(f)^2 * \prod_{e \in C} \sigma(e) = \prod_{e \in C} \sigma(e).$$

Betrachten wir nun ein Knotenpaar $s, t \in G(D^{\#})$, so „hat“ also entweder jeder s-t-Weg positives Vorzeichen oder jeder hat negatives Vorzeichen. Wählen wir nun einen Knoten $v_0 \in G(D^\#)$, so hat definiert demnach σ eine Partition der Knoten in „positive" und „negative" Knoten. Die Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit -1 bewirkt, daß dieser Knoten die Farbklasse wechselt. Also überführt die Multiplikation der negativen Knoten mit -1 die Matrix $D_1^\#$ in $D_2^\#$ und umgekehrt. □

Schließlich müssen wir noch die Pivotoperation etwas genauer unter die Lupe nehmen. Damit diese die Matrix wieder in die Form $(I|X)$ überführt, hängen wir an den reinen Gauß-Eliminationsschritt noch eine Vertauschung der alten mit der neuen Basisspalte an. Sei z.B.

$$A_1 := \left(\begin{array}{c|cc} I_r & \alpha & \underline{x}^\top \\ & \underline{y} & Z \end{array} \right)$$

Pivotieren wir nun nach $\alpha \neq 0$ erhalten wir zunächst

$$A_2 := \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 1 & \alpha^{-1}\underline{x}^\top \\ -\alpha^{-1}\underline{y} & I_{r-1} & 0 & Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$A_3 := \left(\begin{array}{c|cc} I_r & \alpha^{-1} & \alpha^{-1}\underline{x}^\top \\ & \alpha^{-1}\underline{y} & Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top \end{array} \right).$$

Lemma 5.1.8 *1. Ist $G(A_1^\#)$ zusammenhängend, so auch $G(A_3^\#)$.*

2. Ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & \underline{x}^\top \\ y & Z \end{pmatrix}$ quadratisch, so ist $\det(A) = \alpha \det(Z - \alpha^{-1}\underline{y}\underline{x}^\top)$.

Beweis. Ist $G(A_3^\#)$ unzusammenhängend, so kann A_3 durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen in eine Blockdiagonalenmatrix überführt werden. Pivotieren wir andererseits auf α^{-1}, so erhalten wir A_1 zurück. Man überlegt sich aber leicht, daß pivotieren in einer Blockdiagonalenmatrix eine Blockdiagonalenmatrix liefert. Also ist auch $G(A_3^\#)$ unzusammenhängend. Die zweite Aussage rechnet man leicht nach. □

5.2 Der Beweis von Satz 5.1.4

In diesem Abschnitt wollen wir den Beweis der ausgeschlossenen Minoren regulärer Matroide führen.

Beweis. Offensichtlich impliziert die Existenz einer total unimodularen Vorzeichenbelegung für X mit Lemma 4.3.3 eine ebensolche für jede Untermatrix jeder Matrix, die aus X durch Pivotieren hervorgeht. Also folgt die eine Richtung aus der Tatsache, daß die Fano-Ebene nicht über $\mathbb{R}$ linear ist und Satz 4.3.5.

Nehmen wir also nun an, daß X keine total unimodulare Vorzeichenbelegung hat und minimal mit dieser Eigenschaft ist, d.h. jede echte Teilmatrix von X hat eine solche. Offensichtlich ist dann $G(X)$ zusammenhängend und weder ein Kreis noch ein Pfad. Nach Lemma 5.1.5 kann entweder X oder $X^\top$ durch Spaltenvertauschungen in die Form $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ gebracht werden, so daß $G(Z)$ zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung haben $(\underline{x}|Z)$ und $(\underline{y}|Z)$ total unimodulare Vorzeichenbelegungen und wegen Lemma 5.1.7 können wir diese so wählen, daß sie auf Z übereinstimmen. Alle diese Eigenschaften sind invariant unter Pivotieren von Elementen aus Z.

Wir wollen nun zeigen, daß $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ durch Pivotieren, Zeilen- und Spaltenvertauschen sowie Löschen von Zeilen- und Spalten in X_F überführt werden kann. Sei nun W eine Untermatrix von einer Matrix $(\underline{x}_1|\underline{y}_1|Z_1)$, die durch Pivotieren aus $(\underline{x}|\underline{y}|Z)$ entsteht mit folgender Eigenschaft: W ist nicht total unimodular, aber jede echte Untermatrix einer Matrix, die durch Pivotieren eines Elementes in Z aus W entsteht ist total unimodular. Wir behaupten:

> W ist eine Untermatrix von $(\underline{x}_1|\underline{y}_2)$ die durch Multiplikation von Zeilen und Spalten mit -1 in $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ überführt werden kann.

Offensichtlich muß W $\underline{x}$ und $\underline{y}$ treffen. Trifft W auch ein Element in Z, so können wir auf diesem Pivotieren und mit Lemma 5.1.8 erhalten wir einen Widerspruch zur Wahl von W. Der Rest der Behauptung ist trivial.

Also können wir annehmen, daß die ersten zwei Zeilen von $(\underline{x}_1|\underline{y}_2)$ gerade $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ sind. Da $G(Z_1^\#)$ zusammenhängend ist, können wir einen kürzesten Pfad P von dem Knoten der ersten Zeile zum Knoten der zweiten Zeile finden. Angenommen dieser hätte Länge zwei. Dann hätte Z_1 eine Spalte, die in den ersten zwei Zeilen $\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)$ nicht Null wäre. Offensichtlich kann diese Zeile aber höchstens mit einem von $\overline{x}$ und $\overline{y}$ eine total unimodulare Matrix bilden. Also hat P mindestens Länge vier. Dieser kürzeste Weg führt also auf folgende Submatrix D.

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & * & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\
 & & * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & * & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & *
\end{pmatrix},$$

wobei die $*$ Einträge $+1$ oder -1 bedeuten und die weiteren Einträge von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ unklar sind. Durch Multiplikation einiger Zeilen und Spalten mit -1 können wir erreichen, daß alle $*$-Einträge bis auf den in der zweiten Zeile 1 sind. Indem wir die zweite Zeile evtl. noch mit -1 multiplizieren und die ersten beiden Spalten vertauschen, können wir sogar annehmen, daß alle $*$ Einträge 1 sind. Nun pivotieren wir auf dem Element $D_{3,4}$ und erhalten:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}.$$

Streichen wir hier die dritte Zeile und vierte Spalte, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
 & & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}.$$

Dies können wir solange fortführen, bis wir auf die (3×4)-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c, d \in \{0, 1, -1\}$ stoßen. Da das Löschen sowohl der ersten als auch der zweiten Spalte auf eine total unimodulare Matrix führt, müssen $\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ d & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und auch $\det \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ d & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\{0, 1, -1\}$ sein. Dies impliziert $d = 0$. Die (3×3)-Matrix, die durch Löschen der zweiten Spalte entsteht hat Determinante $c-2$, also gilt $c = 1$ und über $GF(2)$ ist die Matrix X_F. $\square$