Kapitel 4

Repräsentierbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir repräsentierbare Matroide für gewisse Körper diskutieren und eine Verallgemeinerung der linearen Repräsentierung anreißen.

4.1 Techniken zur Konstruktion von Repräsentierungsmatrizen

In Abschnitt 2.2.1 hatten wir festgestellt, daß jede Repräsentierungsmatrix durch Wahl einer Basis überführt werden kann in die Form $(I_r|D)$. Also genügt es, sich darauf zu konzentrieren, solche Matrizen zu konstruieren. Wir labeln die Spalten dieser Matrix mit $\{e_1, \dots e_n\}$. Die Zeilen labeln wir mit $\{e_1, \dots, e_r\}$. Also sind die Zeilen von D mit $e_1, \dots, e_r$ und die Spalten mit $e_{r+1}, \dots, e_n$ gelabelt. Offensichtlich ist für $r + 1 \leq k \leq n$ der Fundamentalkreis

$$C(B, e_k) = e_k \cup \{e_i \mid 1 \leq i \leq r \text{ und } D_{i,k-r} \neq 0\}.$$

Ersetzen wir nun in D alle Nicht-Null-Einträge durch 1en, so bestehen die Spalten der resultierenden Matrix also gerade aus den Inzidenzvektoren der Fundamentalkreise von M bzgl. B. Deswegen bezeichnen wir diese 0-1-Matrix als B-*Fundamentalmatrix* von M und bezeichnen sie mit $D^{\#}$. Beachte, daß die Fundamentalmatrix auch für nicht-lineare Matroide definiert ist.

Proposition 4.1.1 *Seien (I_r, D_1) und (I_r, D_2) $(r \times n)$-Matrizen über den Körpern $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{K}'$. Dann ist die Identität ein Isomorphismus von $M[(I_r, D_1)]$ nach $M[(I_r, D_2)]$ genau dann, wenn für alle korrespondierenden quadratischen Untermatrizen D_1', D_2' von D_1 bzw. D_2 gilt*

$$\det(D_1') = 0 \Leftrightarrow \det(D_2') = 0.$$

Beweis. Seien $I \subseteq \{e_{r+1}, \ldots, e_n\}, J \subseteq \{e_1, \ldots, e_r\}$ die Spalten bzw. Zeilenindexmenge von D_1 und D_2. Seien dann $\tilde{D}_i$, die $(r \times r)$-Matrizen die aus den Spalten mit Indizes $I \cup J$ entstehen. Nach Determinantenentwicklungssatz für $i = 1, 2$: $\det(\tilde{D}_i) = \det(D'_i)$. □

Betrachten wir die Matrix $D^{\#}$, so können wir diese auch als Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen $G = (V_1 \cup V_2, E)$ mit $V_1 = \{e_1, \ldots, e_r\}$ und $V_2 = \{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ und $e = (e_i, e_j) \in E \Leftrightarrow D_{i,k-r} \neq 0$ auffassen. Diesen Graphen nennen wir *Fundamentalgraph von M und B* und bezeichnen ihn mit $G(D^{\#})$ oder $G(M, B)$.

Beispiel 4.1.2 *Betrachten wir die Fano-Ebene $F_7 = GF(2)^3 \setminus \{0\}$. Eine geometrische Repräsentierung haben wir links in Abbildung 4.1. Auf der rechten Seite sehen wir das non-Fano Matroid F_7^-. F_7 wird außerdem repräsentiert durch die*

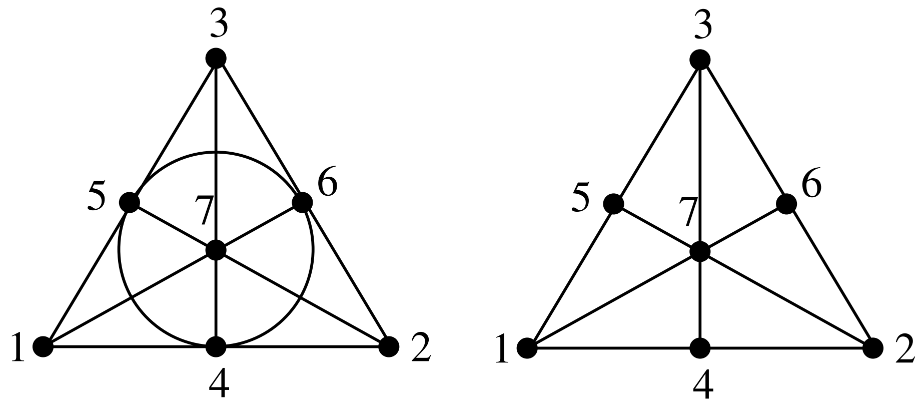

Abbildung 4.1: Das Fano und das non-Fano Matroid

Matrix

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

über $GF(2)$ oder verkürzt

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Das Fano Matroid hat offensichtlich eine transitive Automorphismengruppe also erhalten wir bei Wahl einer beliebigen Basis als Fundamentalgraph den Graphen *in Abbildung 4.2. Den Fundamentalgraph des Duals erhält man nach Satz 2.2.1 durch Vertauschen der Farbklassen.*

Betrachten wir die gleiche Matrix über $\mathbb{R}$, so ändert sich der Fundamentalgraph nicht, wohl aber das Matroid, D stellt dann nämlich das non-Fano dar.

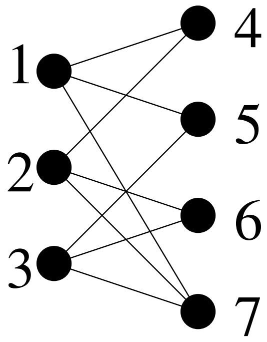

Abbildung 4.2: Der Fundamentalgraph des Fano und des non-Fano Matroids.

Satz 4.1.3 *Sei die $(r \times n)$-Matrix $(I_r|D_1)$ eine $\mathbb{K}$-Repräsentierung des Matroids M. Sei $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis des Kreismatroids des Fundamentalgraphen $G(D_1^{\#})$. Dann ist $k = n -$ Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G(D_1^{\#})$. Ist zusätzlich $(\theta_1, \ldots, \theta_i)$ ein geordnetes i-Tuple aus Nicht-Null-Elementen von $\mathbb{K}$ und $i \leq k$, so hat M eine $\mathbb{K}$-Repräsentierung $(I_r|D_2)$, bei der für alle $j \leq i$ der zur Kante b_j gehörende Eintrag von D_2 gerade θ_j ist. Außerdem gibt es je eine $(r \times r)$-Diagonalmatrix U und eine $(n - r \times n - r)$-Diagonalmatrix V, so daß $D_2 = UD_1V$.*

Beweis. Die Aussage über k ist klar nach Übung 1.2.18. Den Rest des Satzes zeigen wir mittels vollständiger Induktion über i. Die Aussage gilt trivialerweise für $i = 0$ mit $U = I_r, V = I_{n-r}$. Sei nun $i \geq 1$. Da $\{b_1, \ldots, b_i\}$ unabhängig in $M(G(D^{\#}))$ ist, bilden die Kanten einen Wald. Dieser enthält einen Knoten v vom Grad 1. Wir dürfen annehmen, daß die an v anliegende Kante b_i ist. Nach Induktionsannahme gibt es also Diagonalmatrizen Matrizen U', V', so daß $U'D_1V'$ in b_j den Eintrag θ_j hat, für $j = 1, \ldots, i-1$. Entspricht der Knoten v einer Spalte von D_1, so enspricht keins der b_j für $j \leq i-1$ einem Element in dieser Spalte. Wir können also durch Änderung des entsprechenden Eintrags von V' die Spalte so skalieren, daß der b_i-Eintrag θ_i wird. Andernfalls können wir U' modifizieren und die Zeile skalieren. $\square$

Dieses Resultat ermöglicht es uns, die Körper zu bestimmen, über denen F_7 und F_7^- linear sind.

Korollar 4.1.4 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann gilt*

1. *F_7 ist $\mathbb{K}$-linear genau dann, wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik 2 hat.*
2. *F_7^- ist $\mathbb{K}$-linear genau dann, wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik verschieden von 2 hat.*

Beweis. Die Kanten des Fundamentalgraphen ohne $\{(2,7),(3,6),(3,7)\}$ bilden einen aufspannenden Baum im Fundamentalgraph, können also auf 1 fixiert werden. Wegen der Gerade $\{4,7,3\}$ in F_7 und F_7^- muß der Eintrag $d_{2,4} = d_{1,4} = 1$ sein. Wegen der Gerade $\{5,7,2\}$ muß $d_{3,4} = 1$ sein. Die Gerade $\{1,6,7\}$ impliziert nun $d_{3,3} = 1$. Also ist $\{4,5,6\}$ linear abhängig über $\mathbb{K}$ genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 = 0.$$

Abschließend wollen wir uns als Übung noch überlegen, daß die Fundamentalmatrix eines Minors ein „Minor der Fundamentalmatrix“ ist.

Übung 4.1.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $N = M/X \setminus Y$ ein Minor, wobei X unabhängig und Y counabhängig. Sei D die Fundamentalmatrix von M bzgl. einer Basis, die X enthält. Dann ist $B \setminus X$ eine Basis von N, und die Fundamentalmatrix von N bzgl. B entsteht aus D durch Streichen der mit Y indizierten Spalten und der mit X indizierten Zeilen.*

Wir wollen diesen Abschnitt mit der Feststellung schließen, daß die Tatsache linear über einem Körper der Charakteristik 0 zu sein, nicht durch Ausschluß von endlich vielen Minoren garantiert werden kann.

Beispiel 4.1.6 *Sei p eine ungerade Primzahl und L_p die Matrix $L_p = (I_{p+1}|J_{p+1} - I_{p+1})$ über $GF(p)$. Seien die Spalten der Einheitsmatrix mit $e_1, \ldots, e_{p+1}$ gelabelt und die übrigen mit $d_1, \ldots, d_{p+1}$. Wir untersuchen zunächst einmal die nicht aufspannenden Kreise und zeigen*

Die nicht aufspannenden Kreise sind

1. *die Fundamentalkreise $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, d_i\}$,*

2. *die Kreise* $\{e_i, d_i, e_j, d_j\}$ *für* $i \neq j$,
3. *sowie* $\{d_1, \ldots, d_{p+1}\}$.

Offensichtlich sind dies alles Kreise. Angenommen wir hätten einen weiteren nicht aufspannenden Kreis C. Diesen können wir durch Einheitsvektoren zu einer Menge von Vektoren $\tilde{C}$ mit der Eigenschaft $r(\tilde{C}) = |\tilde{C}| - 1 = p$ ergänzen. Dann muß $\tilde{C}$ Einheitsvektoren aus I enthalten. Streichen wir diese und die zugehörigen Zeilen erhalten wir eine Untermatrix von $(J_{p+1} - I_{p+1})$, die höchstens eine 1-Spalte enthält, da C keinen der Kreise vom Typ 2 enthält. Dies ergibt einen Widerspruch, da $\det(J_d - I_d) = (-1)^{d-1}d - 1$[1] und die Determinante einer Matrix mit einer Eins-Spalte und ansonsten Spalten mit genau einer Null an verschiedenen Stellen betraglich 1 ist. Nun zeigen wir:

> *$M[L_p]$ ist linear über einem Körper $\mathbb{K}$ genau dann, wenn $\mathbb{K}$ Charakteristik p hat.*

Wir wählen die angegebene Basis und dürfen nach Satz 4.1.3 auf einem Wald im Fundamentalgraph den Wert 1 vorschreiben. Deshalb können wir in der ersten Spalte und der ersten Zeile, sowie auf der Stelle $d_{2,3}$ Einsen vorschreiben. Mit Hilfe des Viererkreises $\{e_1, e_2, d_1, d_2\}$ folgt zunächst, daß die zweite Zeile der Darstellungsmatrix wie in D sein muß. Die Viererkreise $\{e_2, e_i, d_2, d_i\}$ für $i = 1, \ldots, p+1$, implizieren die Eindeutigkeit der Darstellungsmatrix.

> *Jeder Minor von $M[L_p]$ ist linear über $\mathbb{Q}$ und über jedem Körper der Charakteristik $p' \geq p$.*

Da $M[L_p]$ selbstdual ist, bzgl. der Identität ist, genügt es wegen der Symmetrie $M[L_p] \setminus e_1$ und $M[L_p] \setminus d_1$ zu betrachten. Letzteres wird durch $L_p \setminus d_1$ repräsentiert und $M \setminus e_1$ durch die Matrix $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_2 & \ldots & e_p & e_{p+1} & d_1 & d_2 & \ldots & d_p & d_{p+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & p-1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & p-1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Also sind die $M[L_p]$ minorenminimal nicht über $\mathbb{Q}$ linear und leider unendlich viele.

---

[1] Aus der Betrachtung der Eigenwerte der Matrix konstant Eins erhält man $\det J_d - \lambda I_d = ({}_1)^d \lambda^{d-1} \lambda - n$. Setzt man $\lambda = 1$, so folgt die Behauptung.

4.2 Repräsentierbarkeit über endlichen Körpern, binäre Matroide

Ein Grund, warum ein Matroid über einem Körper nicht repräsentierbar ist kann sein, daß der Körper zu klein ist.

Übung 4.2.1 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dann ist $U_{2,k}$ linear über $\mathbb{K}$ genau dann, wenn $|\mathbb{K}| \geq k-1$.*

Diese Tatsache wollen wir bei binären Matroiden genauer studieren.

Dafür benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

Lemma 4.2.2 *Ein Matroid M ist binär genau dann, wenn für alle $C \in \mathcal{C}$ und alle $C^* \in C^*$ $|C \cap C^*|$ gerade ist.*

Beweis. Ist M binär, so folgt die Behauptung aus Lemma 2.2.3. Für $C \subseteq E$ sei nun χ^C die charakteristische Funktion, bzw. der Inzidenzvektor von C. Betrachte den $GF(2)$-Vektorraum

$$W = \langle \chi^C \mid C \in \mathcal{C} \rangle.$$

Dann gilt nach Voraussetzung für jedes $C^* \in \mathcal{C}^* : C^* \in W^\perp$. Nach Proposition 2.1.11 ist aber $C^* \in \mathcal{C}^*$ genau dann, wenn C^* inklusionsminimal, nicht-leer mit der Eigenschaft $\forall C \in \mathcal{C} : |C \cap C^*| \neq 1$ ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn C^* inklusionsminimal nicht-leer in $W^\perp$ ist. Ist nun A eine $GF(2)$-Matrix mit $Bild(A^\top) = W^\perp$, so ist nach Lemma 2.2.3 $M = M[A]$. □

Satz 4.2.3 *Ein Matroid ist binär genau dann, wenn es keinen $U_{2,4}$-Minor hat.*

Beweis. In der Übung wurde die eine Richtung bewiesen. Sei nun N ein nicht-binäres Matroid mit der Eigenschaft, daß jeder Minor von N binär ist. Wegen Lemma 4.2.2 enthält N einen Kreis C und einem Cokreis C^* mit ungeradem Schnitt. Wir wählen diese so, daß der Schnitt möglichst klein ist. Da Kontraktion von $e \in C \setminus C^*$ oder Löschen von $f \in C^* \setminus C$ daran nichts ändert, gilt notwendig $C = C^*$. Sei nun $e \in E(N) \setminus C$. Da $N \setminus e$ binär ist, schließen wir, daß dort C^* kein Cokreis mehr ist. Also ist jedes solche e eine Coschleife in $N \setminus C$. Demnach ist $H_0 := E \setminus C$ eine unabhängige Hyperebene. Sei $b_1 \in H_0 \neq \emptyset$. Seien nun $H_1, \ldots, H_m$ die von H_0 verschiedenen Hyperebenen N, die den Unterraum $H_0 \setminus b_1$ (der Codimension 2) enthalten. Offensichtlich ist $b_1 \notin H_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und $|C \cap (E \setminus H_i)| < |C|$. Aufgrund der Minimalität von C muß also $|C \cap (E \setminus H_i)|$ gerade und somit $H_i \cap C$

ungerade sein. Da $C \nsubseteq H_i$ (denn B_1 ist keine Coschleife)XS aber $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ und C ungerade, nicht einelementig ist, schließen wir $m \geq 3$. Nun ist aber nach Proposition 3.3.3 $N/(H_0 \setminus b_1) \cong U_{2,m+1}$. Aufgrund der Minimalität von N erhalten wir daraus $H_0 = b_1, m = 3$ und somit $N = U_{2,4}$. □

.

Korollar 4.2.4 *Ein Matroid ist binär genau dann, wenn jeder Unterraum der Dimension $r(M) - 2$ (i.e. jede Cogerade) in höchstens drei Hyperebenen enthalten ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 3.3.3 und dem Satz vom Abschaum. □

Für den Fall ternärer Matroide und der Matroide linear über $GF(4)$ ist es bekannt, daß die Liste der verbotetenen Minoren endlich ist. Wir geben hier die Resultate ohne Beweis an. Den Beweis im ternären Fall findet man im Buch von Oxley. Der $GF(4)$-Fall sollte demnächst als Preprint erhältlich sein. Man beachte, daß mit einem Matroid N auch sein Dual N^* ein minimaler verbotener Minor sein muß.

Satz 4.2.5 *(Bixby, Seymour 1979) Ein Matroid ist ternär genau dann, wenn es keinen der folgenden Minoren enthält: $U_{2,5}, U_{3,5}, F_7, F_7^*$.*

Für den $GF(4)$ Fall stellen wir noch zwei Beispiele vor.

Beispiel 4.2.6 *Betrachte das Matroid P_6, das in Abbildung 4.3 geometrisch repräsentiert ist .*

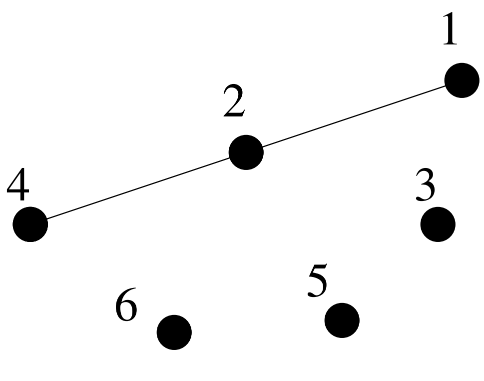

Abbildung 4.3: P_6

1. *Das Matroid P_6 ist $\mathbb{K}$-repräsentierbar genau dann, wenn $|\mathbb{K}| \geq 5$. Denn ist $x_1, \dots, x_6$ eine Repräsentierung und $l =< x_1, x_2, x_4 >$ so gibt es $0 \neq x_{3,5} \in l \cap < x_3, x_5 >$ und analog $x_{3,6}$ sowie $x_{5,6}$. Diese Punkte sind offensichtlich paarweise verschieden und verschieden von x_1, x_2, x_4. Also ist $U_{2,6}$ $\mathbb{K}$-linear und somit $\mathbb{K} \geq 5$. Für die Rückrichtung betrachte α, β paarweise verschieden und verschieden von $0, 1$ mit $\alpha\beta \neq 1$*

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. *Das Matroid P_8 sei gegeben durch folgende Matrix über $GF(3)$:*

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Dann ist P_8 ein minorenminimales nicht $GF(2^k)$-repräsentierbares Matroid für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für den etwas längeren Beweis verweisen wir wieder auf [7].

Satz 4.2.7 *(Geelen, Gerards, Kapoor 1997) Ein Matroid ist linear über $GF(4)$ genau dann, wenn es keinen der folgenden Minoren enthält:*

$$U_{2,6}, U_{4,6}, F_7^-, (F_7^-)^*, P_6, P_8, P_8''.$$

Für keinen anderen endlichen Körper ist es bekannt, ob die Liste der verbotenen Minoren überhaupt endlich ist.

4.3 Reguläre Matroide

Wir wollen nun den Bogen von regulären Matroiden zur ganzzahligen Programmierung schlagen.

Definition 4.3.1 *Sei A eine Matrix über $\mathbb{R}$. Dann heißt A* total unimodular*, falls jede Unterdeterminante den Wert $0, 1$ oder -1 hat.*

Proposition 4.3.2 *Sei A eine total unimodulare Matrix. Dann ist $M[A]$ regulär.*

Beweis. Sei B eine quadratische Untermatrix von A und $\mathbb{K}$ ein Körper. Eventuell durch Identifikation $-1 = 1$ im Falle der Charakteristik 2 können wir B als Matrix über $\mathbb{K}$ betrachten. Offensichtlich gilt dann $\det_{\mathbb{K}}(B) = \det_{\mathbb{R}}(B) \bmod \mathrm{char}(\mathbb{K})$. $\square$

Die Umkehrung bereiten wir mit einem Lemma vor.

Lemma 4.3.3 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik und D eine Matrix über $\mathbb{K}$ mit Einträgen in $\{0, +1, -1\}$, so daß $M[(I, D)]$ binär ist. Sei B eine Basis von $M[(I, D)]$. Dann ist $|\det((I, D)_{.,B})| = 1$.*

Beweis. Sei $\tilde{B}$ die Basis der Einheitsvektoren. Wir führen Induktion über $k = |\tilde{B} \setminus B|$. Die Fälle $k = 0, 1$ sind klar, sei also $k \geq 2$ und $e \in \tilde{B} \setminus B$. Nach $(B2)$ gibt es $f \in B \setminus \tilde{B}$, so daß $B' := \tilde{B} \setminus e \cup f$ wieder eine Basis ist. Wir zeigen nun, daß $(I, D)_{B'}^{-1}(I, D)$ eine $\{0, +1, -1\}$-Matrix ist, woraus die Behauptung mittels vollständiger Induktion folgt. Da B' eine Basis ist, ist $d_{e,f} \in \{+1, -1\}$. Pivotieren wir dieses Element in die Basis, so lautet die Update-Formel für Element $d_{j,k}$:

$$d_{j,k} := d_{j,k} - d_{e,k}\frac{d_{j,f}}{d_{e,f}}.$$

Ist dieser Wert aber zwei, so ist $\tilde{B} \setminus \{e, j\} \cup \{f, k\}$ keine $GF(2)$-Basis, aber eine Basis über jedem Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik. $\square$

Lemma 4.3.4 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ linear über $GF(2)$ und einem Körper $\mathbb{K}$ mit von zwei verschiedener Charakteristik. Dann gibt es eine total unimodulare Matrix A mit $M = M[A]$.*

Beweis. Wir wählen eine Basis von M. Sei $(I|D)$ eine $\mathbb{K}$-Repräsentierung und B_D eine Basis des graphischen Matroids $G(D^{\#})$. Nach Satz 4.1.3 können wir annehmen, daß D in den zu B_D gehörenden Einträgen auf 1 skaliert ist. Sei nun d ein Nichtnulleintrag, der nicht in B_D ist. Sei dann C_d der Fundamentalkreis von d in $G(D^{\#})$. Wir beweisen nun mit vollständiger Induktion über $|C_d|$, daß $d \in \{0, +1, -1\}$. Wir können also annehmen, daß alle d' mit $|C_{d'}| < |C_d|$ in $\{+1, -1\}$ liegen. Sei D_d die quadratische Teilmatrix von D, die zu den Knoten von C_d gehört und d' ein von Null verschiedener Eintrag von D_d, der nicht in $B_D \cup \{d\}$ liegt. Dann ist d' in $G(D^{\#})$ eine Sehne von C_d, also ist $C_{d'}$ kürzer als C_d und somit $d' \in \{1, -1\}$. Sei nun $\tilde{C}_d$ ein kürzester Kreis in $G(D_d^{\#})$, der d enthält. Dann hat die $\tilde{C}_d$ entspredhende Matrix $\tilde{D}_d$ in jeder Zeile und Spalte genau zwei Nichtnulleinträge. Bis auf d sind diese alle 1 oder -1. Über $GF(2)$ ist die Matrix, die an allen Nicht-Null-Einträgen 1-en stehen hat, abhängig. Folglich muß Sie es auch über $\mathbb{K}$ sein und somit $d \in \{+1, -1\}$.

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3.3. □

Wir erhalten somit insgesamt folgende Äquivalenz:

Satz 4.3.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:*

1. *M ist regulär.*
2. *M ist linear über $GF(2)$ und einen Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik.*
3. *Es gibt eine total unimodulare Matrix A mit $M = M[A]$.*

□

4.4 Algebraische Matroide

Neben linearer Abhängigkeit gibt es in der Körpertheorie noch algebraische Abhängigkeit. Auch diese definiert Matroide. Diese Matroidklasse werden wir nur kurz vorstellen. Sie scheint kompliziert zu sein.

Definition 4.4.1 *Sei $\mathbb{F}$ ein Unterkörper des Körpers $\mathbb{K}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{K}$. Dann heißt $\beta \in \mathbb{K}$* algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ über $\mathbb{F}$, *wenn β algebraisch über $\mathbb{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ ist, d.h. β einer algebraischen Gleichung*

$$p_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\beta^g + p_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\beta^{g-1} + \ldots + p_g(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = 0$$

genügt, deren Koeffizienten Polynome in $\mathbb{F}[\alpha_1, \ldots, \alpha_t]$ sind, die nicht alle Null sind. $T \subseteq \mathbb{K}$ heißt algebraisch abhängig, *falls ein $t \in T$ algebraisch abhängig von $T \setminus t$ ist, ansonsten* algebraisch unabhängig über $\mathbb{F}$.

Proposition 4.4.2 *Sei β algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ aber algebraisch unabhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$. Dann ist α_s algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \beta$.*

Beweis. Wir betrachten α_s und β über $\mathbb{G} := \mathbb{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$. Dann ist β algebraisch abhängig von α_s über $\mathbb{G}$. Ordnen wir die algebraische Relation

$$p_0(\alpha_s)\beta^g + p_1(\alpha_s)\beta^{g-1} + \ldots + p_g(\alpha_s) = 0 \tag{4.1}$$

nach Potenzen von α_s, so erhalten wir

$$q_0(\beta)\alpha_s^h + q_1(\beta)\alpha_s^{g-1} + \ldots + q_h(\beta) = 0. \tag{4.2}$$

Da β nach Voraussetzung nicht algebraisch über $\mathbb{F}$ ist, ist jedes Polynom $q_i(x)$ entweder identisch Null oder $q_i(\beta) \neq 0$. Sie können aber nicht alle identisch Null sein, da ansonsten schon Gleichung 4.1 trivial wäre. □

Übung 4.4.3 *Sei s algebraisch über $\mathbb{F}(t)$ und t algebraisch über $\mathbb{F}$. Dann ist s algebraisch über $\mathbb{F}$.*

Lemma 4.4.4 *Sei γ algebraisch abhängig von $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ und jedes α_i algebraisch abhängig von $\beta_1, \ldots, \beta_s$. Dann ist auch γ abhängig von $\beta_1, \ldots, \beta_s$.*

Beweis. Wir zeigen dies mit vollständiger Induktion über t, der Fall $t = 1$ war die letzte Übung. Ansonsten betrachten wir $\mathbb{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \mathbb{F}(\alpha_t)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann γ algebraisch über $\mathbb{F}(\alpha_t)(\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Da allerdings α_t algebraisch über $\mathbb{F}(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ ist, folgt aus der letzten Übung die Behauptung. □

Satz 4.4.5 *Sei $\mathbb{F}$ ein Unterkörper des Körpers $\mathbb{K}$ und $E \subseteq \mathbb{K}$ und $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid I$ ist algebraisch unabhängig über $\mathbb{F}\}$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid.*

Beweis. Offensichtlich erfüllt $\mathcal{I}$ (I1) und (I2). Angenommen (I3) wäre nicht erfüllt und $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_2| > |I_1|$ und $\forall e \in I_2$ wäre $I_1 \cup e$ algebraisch abhängig. Sei nun $I_1' \subseteq I_1 \cup I_2$ eine Menge kleinster Kardinalität, von der alle $e \in I_2$ algebraisch abhängig sind und so daß $|I_1' \setminus I_2|$ minimal ist. Da $|I_2| > |I_1| \geq |I_1'|$ können wir $e \in I_2 \setminus I_1'$ wählen. Sei $I_1'' \subseteq I_1'$ minimal mit der Eigenschaft, daß $I_1'' \cup e$ algebraisch abhängig ist. Dann ist $I_1'' \cup e \not\subseteq I_2$, sei also $f \in I_1'' \setminus I_2$. Nach Minimalitätsannahme ist e über I_1'' nicht aber über $I_1'' \setminus f$ algebraisch. Nach Proposition 4.4.2 ist demnach f algebraisch über $I_1'' \setminus f \cup e$ und damit über $I_1' \setminus f \cup e$. Demnach ist jedes Element von I_1' algebraisch über $I_1' \setminus f \cup e$. Außerdem ist aber jedes Element von I_2 algebraisch über I_1'. Also ist nach Lemma 4.4.4 jedes Element von I_2 algebraisch über $I_1' \setminus f \cup e$ im Widerspruch zur Wahl von I_1'. □

Proposition 4.4.6 *Minoren algebraischer Matroide sind algebraisch.*

Beweis. Offensichtlich sind Restriktionen algebraischer Matroide algebraisch. Eine algebraische Darstellung einer Kontraktion M/T erhält man durch Betrachtung von $E \setminus T$ über $\mathbb{F}(T)$ aus Proposition 3.1.4. □

Mit etwas mehr Algebra kann man zeigen, daß man in algebraischen Matroiden Serien abkürzen kann:

Satz 4.4.7 ([2]) *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein algebraisches Matroid mit $E \subseteq \mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$. Sei S in Serie in M (d.h alle Elemente in S sind coparallel). Dann gibt es ein Element β im algebraischen Abschluß von $\mathbb{K}$, so daß für alle $S \subseteq C \subseteq E$ gilt:*

$$C \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow C \setminus S \cup \beta \in \mathcal{C}(M \cup \beta).$$

Proposition 4.4.8 ([4]) *Das Vamos-Matroid ist nicht algebraisch.*

Beweis. Die Punkte $1, 2$ sind in Serie im Restriktionsminor $M_{|\{1,2,3,4,7,8\}}$. Wäre dieser algebraisch, so gäbe es im algebraischen Abschluß des Oberkörpers ein $\beta \in \mathrm{cl}\,(3, 4) \cap \mathrm{cl}\,(7, 8)$. Nach Beispiel 1.3.4 liegt β dann aber auch im Schnitt der Geraden durch $1, 2$ und $5, 6$. Widerspruch. □

Proposition 4.4.9 *Das Dual T^* des Tic-Tac-Toe Matroids ist nicht algebraisch.*

Beweis. Das Dual des Tic-Tac-Toe Matroids hat Rang 4 und die Komplemente der 5-Punkt-Hyperebenen des Tic-Tac-Toe Matroids bilden die 4-Punkt-Hyperebenen des Duals. Betrachten wir nun die Restriktion auf $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, so bildet diese ein Prisma. Darin sind etwa $\{a_1, b_1\}$ in Serie. Wäre T^* algebraisch, so gäbe es im algebraischen Abschluß des Oberkörpers ein $\beta_1 \in \mathrm{cl}\,(a_2, b_2) \cap \mathrm{cl}\,(a_3, b_3)$. Nach Beispiel 1.3.4 liegt β_1 dann aber auch auf der Geraden durch a_1, b_1. Ebenso finden wir β_2 im Schnitt der Geraden durch b_i, c_i. Dann liegen β_1 und β_2 auf den durch a_i, b_i, c_i erzeugten Ebenen. Betrachten wir nun das Matroid, das durch $\{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, \beta_1, \beta_2\}$ erzeugt wird. Es hat Rang 4 und nach Voraussetzung und wegen der letzten Überlegung hat es folgende 4-Punkthyperebenen:

$$\{a_1, c_1, a_1, c_2\}, \{a_2, c_2, a_3, c_3\}, \{a_1, c_1, \beta_1, \beta_2\}, \{a_2, c_2, \beta_1, \beta_2\}, \{a_3, c_3, \beta_1, \beta_2\}.$$

Also ist dieses Matroid das Vamos-Matroid, welches wir bereits als nicht-algebraisch identifiziert haben. □

Bemerkung 4.4.10 *Das Tic-Tac-Toe Matroid besitzt alle bisher bekannten Eigenschaften algebraischer Matroide. Es ist bisher nicht bekannt, ob die algebraischen Matroide unter Dualität abgeschlossen sind.*

Kapitel 5

Die verbotenen Minoren regulärer Matroide

In diesem Kapitel wollen wir das zentrale Resultat an den Anfang stellen und uns erst dann den Beweis erarbeiten. Der hier vorgestellte elementare Beweis dieses klassischen Resultates geht zurück auf Gerards [3]. Der neue Beweis der excluded minors für $GF(4)$-Repräsentierbarkeit beruht im wesentlichen auf dem gleichen Ansatz.

5.1 Das Resultat und seine Lemmata

Satz 5.1.1 *Ein Matroid ist regulär genau dann, wenn es keinen $U_{2,4}$, F_7 oder F_7^*-Minor hat.*

Offensichtlich ist dies wegen Satz 4.2.3 äquivalent mit

Satz 5.1.2 *Ein binäres Matroid ist regulär genau dann, wenn es keinen F_7 oder F_7^*-Minor hat.*

Wir hatten oben schon bemerkt, daß die Fundamentalmatrix ein binäres Matroid repräsentieren muß. Bei regulären Matroiden muß es wegen Satz 4.3.5 eine Vorzeichenbelegung der Fundamentalmatrix geben, so daß diese regulär wird.

Definition 5.1.3 *Sei X eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen in $\{0, 1\}$. Eine* Vorzeichenbelegung von X *ist eine $(m \times n)$-Matrix Y mit* $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n : |y_{i,j}| = x_{i,j}$.