Kapitel 3

Minoren

Minoren von Matroiden kodieren Teilkonfigurationen und Projektionen der Geometrie. Allgemein spielt das Konzept der verbotenen Minoren eine wesentliche Rolle, da viele wichtige Graphenklassen sich durch Ausschluß einer endlichen Liste von Minoren charakterisieren lassen. Im Laufe dieser Vorlesung werden wir die Charakterisierung für binäre und reguläre Matroide kennenlernen.

3.1 Allgemeine Minoren

Wir hatten in Kapitel 1 bereits Restriktionsminoren kennengelernt. Hier wollen wir die duale Operation zum Löschen von Elementen vorstellen.

Definition 3.1.1 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Die* Kontraktion von T in M *ist dann das Matroid*

$$M/T := (M^* \setminus T)^*.$$

Betrachten wir als Beispiel graphische Matroide.

Beispiel 3.1.2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $T \subseteq E$. Sei $\tilde{V} := V/T$ die Menge der Äquivalenzklassen der Knoten V bzgl. der Äquivalenzrelation $u \sim v \Leftrightarrow u$ und v liegen in einer Komponente von $G[T]$. Die Kontraktion von T in G ist dann der Graph $G/T = (V/T, E \setminus T)$. Sei nun T ein Wald. Wir haben dann folgende Äquivalenzen*

$W \subseteq E$ *ist Wald in* $G/T \quad \Leftrightarrow \quad W \cup T$ *ist Wald in* G

$$
\begin{aligned}
&\overset{2.1.4}{\Leftrightarrow} \quad cl_{M^*(G)}(E \setminus (W \cup T)) = E \\
&\overset{1.2.25}{\Leftrightarrow} \quad cl_{M^*(G)\setminus T}((E \setminus T) \setminus W) = E \setminus T \\
&\overset{2.1.4}{\Leftrightarrow} \quad W \textit{ ist unabhängig in } (M^*(G) \setminus T)^* = M(G)/T.
\end{aligned}
$$

Da unabhängige Mengen und Wälder sich durch das Vorhandensein zusätzlicher Schleifen nicht ändern, erhalten wir insgesamt

$$M(G/T) = M(G)/T.$$

Nach Definition der Rangfunktion gilt offensichtlich für Restriktionsminoren falls $X \subseteq E \setminus T : r_M(X) = r_{M\setminus T}(X)$. Folglich erhalten wir aus Proposition 2.1.5 sofort:

Proposition 3.1.3 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $T \subseteq E$ und $X \subseteq (E \setminus T)$. Dann gilt:*

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T).$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
r_{M/T}(X) &= |X| + r_{M^*\setminus T}(E \setminus T \setminus X) - r_{M^*\setminus T}(E \setminus T) \\
&= |X| + r^*_M(E \setminus (T \cup X)) - r^*_M(E \setminus T) \\
&= |X| + (|E \setminus (T \cup X)| + r_M(T \cup X) - r_M(E)) \\
&\quad - (|E \setminus T| + r_M(T) - r_M(E))
\end{aligned}
$$

□

Als nächstes werden wir unabhängige Mengen, Basen und Kreise der Kontraktion eines Matroids beschreiben.

Proposition 3.1.4 *Sei B_T eine Basis von $M_{|T}$. Dann ist*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(M/T) &= \{I \subseteq E \setminus T \mid I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\} \\
&= \{I \subseteq E \setminus T \mid \exists B \in \mathcal{B}(M_{|T}) : I \cup B \in \mathcal{I}(M)\} \\
\mathcal{B}(M/T) &= \{B' \subseteq E \setminus T \mid B' \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\} \\
&= \{B' \subseteq E \setminus T \mid \exists B \in \mathcal{B}(M_{|T}) : B' \cup B \in \mathcal{B}(M)\} \\
\mathcal{C}(M/T) &= \{C \setminus T \mid C \in \mathcal{C}(M) \textit{ und } \forall C' \in \mathcal{C} : (C' \setminus T \not\subset C \setminus T \neq \emptyset\} \\
cl_{M/T}(X) &= cl_M(X \cup T) \setminus T
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach Proposition 1.2.17 und der vorangegangenen Proposition haben wir

$$X \in \mathcal{I}(M/T) \Leftrightarrow r_{M/T}(X) = |X| \Leftrightarrow r_M(X \cup T) = r_M(T) + |X|.$$

Die letzte Gleichung bedeutet aber genau, daß sich X durch eine Basis von T zu einer Basis von $X \cup T$ ergänzen läßt. Dies impliziert die ersten und die zweiten Gleichheiten. Für die dritte Behauptung sei $B_{C,T}$ eine Basis von T, die $C \cap T$ enthält. Dann haben wir

$$\begin{aligned} r_{M/T}(C \setminus T) &= r(C \cup B_T) - r(B_T) \\ &\leq r(C) + r(B_T \setminus C) - r(B_T) \\ &= |C| - 1 - |B_T \cap C| \\ &= |C \setminus T| - 1. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt direkt wiederum mit Proposition 1.2.25.

□

Übung 3.1.5 *Charakterisiere* $\mathcal{I}(M \setminus T), \mathcal{B}(M \setminus T), \mathcal{C}(M \setminus T), cl_{M \setminus T}, \mathcal{C}^*(M \setminus T), \mathcal{C}^*(M/T), \mathcal{H}(M \setminus T), \mathcal{H}(M/T)$.

Proposition 3.1.6 *Sei* $M = (E, \mathcal{I})$ *ein Matroid und* $T \subseteq E$. *Dann gilt* $M/T = M \setminus T$ *genau dann, wenn* $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$.

Beweis. Wir haben nach Korollar 1.2.16 und Proposition 3.1.3

$$\begin{aligned} M/T = M \setminus T &\Leftrightarrow r_{M/T} = r_{M \setminus T} \\ &\Leftrightarrow \forall X \subseteq (E \setminus T) : r_M(X \cup T) = r_M(X) + r_M(T). \end{aligned}$$

Mit $X = E \setminus T$ folgt die eine Implikation. Andererseits schließen wir aus der Submodularität der Rangfunktion für beliebiges $X \subseteq E \setminus T : r(X \cup T) + r(E \setminus T) \geq r(X) + r(M)$. Setzen wir darin die Gleichung $r(T) + r(E \setminus T) = r(M)$ ein, so erhalten wir: $r(X \cup T) \geq r(X) + r(T)$ woraus wiederum mit der Submodularität die letzte Gleichung folgt. □

Hieraus erhalten wir sofort das

Korollar 3.1.7 $M/e = M \setminus e$ *genau dann, wenn* e *eine Schleife oder eine Coschleife (Brücke) ist.*

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Nachweis daß die Kontraktions- und Löschoperationen assoziativ und kommutativ sind.

Proposition 3.1.8 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T_1, T_2 \subseteq E$ mit $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Dann gilt:*

1. $(M \setminus T_1) \setminus T_2 = M \setminus (T_1 \cup T_2) = (M \setminus T_2) \setminus T_1$.
2. $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2) = (M/T_2)/T_1$.
3. $(M \setminus T_1)/T_2 = (M/T_2) \setminus T_1$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition des Restriktionsminors, damit ist per definitionem die zweite Aussage klar. Wir zeigen nun noch, daß die Rangfunktionen von $(M \setminus T_1)/T_2$ und $(M \setminus T_2)/T_1$ übereinstimmen, denn für $X \subseteq E \setminus (T_1 \cup T_2)$ haben wir:

$$\begin{aligned} r_{(M/T_1)\setminus T_2}(X) &= r_{M/T_1}(X) \\ &= r_M(X \cup T_1) - r_M(T_1) \\ &= r_{M\setminus T_2}(X \cup T_1) - r_{M\setminus T_2}(T_1) \\ &= r_{(M\setminus T_1)/T_2)}(X). \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.9 *Ein Matroid der Form $M/X \setminus Y$ heißt ein* Minor *von M. Ist $\mathcal{N}$ eine Klasse von Matroiden, so heißt ein Minor N_1 von M ein $\mathcal{N}$-Minor von M, wenn N_1 isomorph zu einem Element aus $\mathcal{N}$ ist.*

Übung 3.1.10 *Das Matroid N ist ein Minor von M genau dann, wenn N^* ein Minor von M^* ist.*

3.2 Spezielle Minoren

Die meisten Klassen von Matroiden, die wir bisher vorgestellt haben, sind *abgeschlossen unter Minorenbildung*. Für graphische Matroide haben wir uns das bereits in Beispiel 3.1.2 überlegt. Wir werden hier weitere positive Beispiele kennenlernen und mit den Transversalmatroiden eine Klasse als Gegenbeispiel untersuchen.

Wie steht es mit Vektormatroiden? Unter Restriktionsbildung sind diese offensichtlich abgeschlossen mit

$$M[A] \setminus T = M[A_{\cdot,E\setminus T}],$$

wobei $M[A_{\cdot,E\setminus T}]$ die Matrix sei, die aus A durch Streichen der mit T indizierten Spalten entstehe. Da Vektormatroide nach Satz 2.2.2 abgeschlossen unter Dualität sind, haben wir insgesamt sofort

Proposition 3.2.1 *1. Minoren graphischer Matroide sind graphisch.*

2. *Für jeden Körper $\mathbb{K}$ ist jeder Minor eines $\mathbb{K}$-repräsentierbaren Matroids $\mathbb{K}$-repräsentierbar.*

3. *Jeder Minor eines regulären Matroids ist regulär.*

Wir haben aufgrund unserer Überlegungen zur Darstellung des Duals eines linearen Matroids $M[A]$ schon eine Technik zur Hand, um die Repräsentierung eines Kontraktionsminors zu berechnen. Eine kurze Meditation über Satz 2.2.2 zeigt, daß es einfach ist, eine lineare Darstellung für M/I zu finden, wenn I unabhängig in M ist. Ist nämlich A_B eine reguläre Untermatrix von A, die eine Basis repräsentiert und $A_B^{-1}A/I$ die Matrix, bei der die zu I gehörenden Einheitsspalten sowie die Zeilen, in denen einer dieser Einheitsvektoren nicht null ist, gestrichen worden sind, so stellt diese M/I dar.

Lemma 3.2.2 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, I unabhängig und $I \subseteq B \in \mathcal{B}(M)$. Dann ist*

$$M[A]/I = M[A_B^{-1}A]/I = M[A_B^{-1}A/I].$$

Beweis. Beachte $M/I = (M^* \setminus I)^*$. □

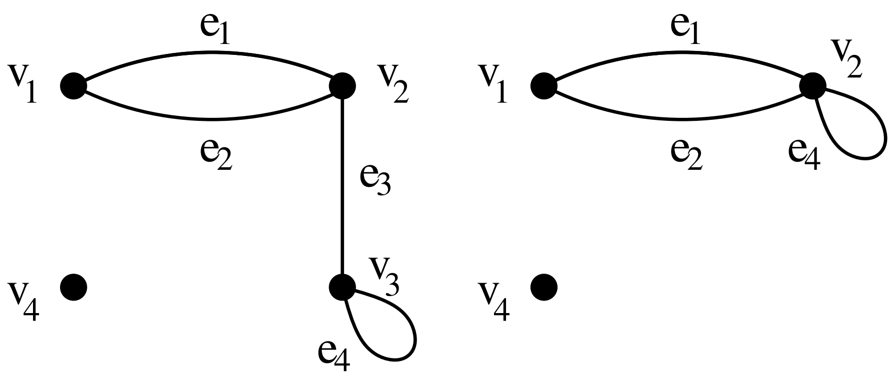

Abbildung 3.1: Eine Kontraktion

Beispiel 3.2.3 *Betrachte die Graphen in Abbildung 3.1. Der rechte geht aus dem linken durch Kontraktion der Kante e_3 hervor. Die zugehörigen Matrizenoperationen sehen so aus:*

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cong \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Wie steht es mit Transversalmatroiden? Offensichtlich ist für das Mengensystem $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ über E und $T \subseteq E$ $M[\mathcal{A}] \setminus T = M[(A_i \setminus T)_{i \in J}]$ ein Transversalmatroid. Wie steht es aber mit den Kontraktionen?

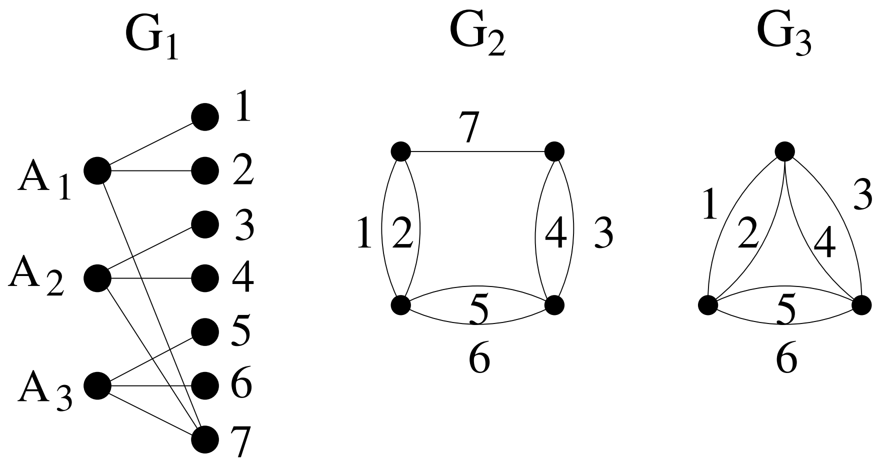

Abbildung 3.2: Transversalmatroide sind nicht abgeschlossen unter Kontraktion.

Beispiel 3.2.4 *Betrachten wir das Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ mit $\Delta[\mathcal{A}] = G_1$ in Abbildung 3.2, so ist offensichtlich $M[\mathcal{A}] \cong M(G_2)$. Allerdings ist $M[\mathcal{A}]/7 \cong M[G_3]$ nicht transversal nach Beispiel 1.4.3.*

Also sind strenge Gammoide als Dual von Transversalmatroiden nicht unter Restriktion abgeschlossen. Deswegen definieren wir

Definition 3.2.5 *Ein* Gammoid *ist ein Matroid, das isomorph zu einem Restriktionsminor eines strengen Gammoids ist.*

Die Klasse der Gammoide ist also erzwungenermaßen abgeschlossen unter Minorenbildung. Allerdings gilt zusätzlich:

Proposition 3.2.6 *Jedes Transversalmatroid ist ein Gammoid.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in J}$ und $A_i \subseteq S$ für $i \in J$. Wir orientieren $\Delta[\mathcal{A}]$ von S nach J und betrachten das zugehörige strenge Gammoid $L(G, J)$. Sei nun $I \subseteq S$ unabhängig in $L(G, J)$. Dann gibt es knotendisjunkte Wege von I nach J in $\Delta(\mathcal{A})$. Da jeder gerichtete Weg in $\Delta(\mathcal{A})$ aus höchstens einer Kante besteht, bilden diese Wege ein Matching, also ist $I \in \mathcal{I}(M[\mathcal{A}])$ und somit $M[\mathcal{A}] \cong L(G, J)_{|S}$. □

Proposition 3.2.7 *Das Dual eines Gammoids ist ein Gammoid.*

Beweis. $M = L(\mathcal{A}, S)_{|T} \overset{2.2.12}{\Rightarrow} M^* = M[\mathcal{A}]/(S \setminus T)$. □

Wir beschließen den Exkurs über Gammoide mit der Feststellung, daß die Gammoide die kleinste unter Minoren abgeschlossene Klasse von Matroiden sind, die die Transversalmatroide enthalten:

Korollar 3.2.8 *Die Gammoide sind genau die Transversalmatroide und ihre Kontrakte.*

Beweis. Ist M ein Gammoid, so ist M^* ein Gammoid also $M^* = L(\mathcal{A}, S)_{|T}$ und somit $M = M[\mathcal{A}]/(S \setminus T)$. □

3.3 Projektionen, Unterräume und der Satz vom Abschaum

In diesem Abschnitt wollen wir uns wieder der verbandstheoretischen Sichtweise zuwenden und Minoren an ihren geometrischen Verbänden studieren. Der Satz vom Abschaum besagt, daß Minoren oben auf dem Verband „schwimmen".

Proposition 3.3.1 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$ und $F \subseteq E \setminus T$. Dann gilt*

1. *F ist ein Unterraum von M/T genau dann, wenn $F \cup T$ ein Unterraum von M ist.*

2. *F ist ein Unterraum von $M \setminus T$ genau dann, wenn M einen Unterraum F' mit $F = F' \setminus T$ hat.*

Beweis. Nach Proposition 3.1.4 ist $\mathrm{cl}_{M/T}(X) = \mathrm{cl}_M(X \cup T) \setminus T$ und nach Übung 3.1.5 ist $\mathrm{cl}_{M \setminus T}(X) = \mathrm{cl}_M(X) \setminus T$ woraus die Behauptung folgt. □

Aus dieser Beobachtung erhalten wir einen Zusammenhang zwischen Filtern, Idealen und Minoren.

Definition 3.3.2 *Sei $(P, \leq)$ eine Partialordung und $F, I \subseteq P$. Dann heißt F ein* Filter *von P, wenn F nach oben abgeschlossen ist, d.h. aus $x \geq y \in F$ folgt $x \in F$. Analog nennen wir I ein* Ideal *wenn I nach unten abgeschlossen ist, d.h. aus $x \leq y \in I$ folgt $x \in I$. Ein Filter (Ideal), der (das) durch ein Element erzeugt wird, also z.B. $F = \{x \in P \mid x \geq a\}$ heißt* Hauptideal (Hauptfilter).

Proposition 3.3.3 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $T \subseteq E$. Dann gilt*

1. *$\mathcal{L}(M/T)$ ist isomorph zu dem Hauptfilter $[\mathrm{cl}_M(T), 1_M]$.*
2. *Ist $E \setminus T$ ein Unterraum, so ist $\mathcal{L}(M \setminus T)$ isomorph zu dem Hauptideal $[0_M, E \setminus T]$.*

Beweis. Zur ersten Aussage betrachte den Isomorphismus $X \mapsto X \cup T$. Die zweite Aussage ist völlig trivial. □

Als Korollar erhalten wir:

Korollar 3.3.4 *Sind T_1 und $E \setminus T_2$ Unterräume von M mit $T_1 \subseteq E \setminus T_2$. Dann ist $\mathcal{L}(M/T_1 \setminus T_2) \cong [T_1, E \setminus T_2]$.* □

Der Verbandes eines Restriktionsminors ist nur bei Restriktion auf einen Unterraum ein Intervall des Verbandes von M.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß man bei einem Minor $M/Y \setminus X$ oBdA. annehmen kann, daß Y unabhängig und X counabhängig ist. Dafür benötigen wir zunächst:

Lemma 3.3.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X, Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Sei Y_1 eine Basis von $M_{|Y} = M \setminus (E \setminus Y)$ und X_1 eine Cobasis von $M.X := M/(E \setminus X)$. Dann gilt für jede Partition (X_2, Y_2) von $(X \setminus X_1) \cup (Y \setminus Y_1)$:*

$$M \setminus X/Y = M \setminus (X_1 \cup Y_2)/(Y_1 \cup X_2).$$

Beweis. Kontrahiert man eine Basis, bleiben nur noch Schleifen. Also gilt nach Korollar 3.1.7 für jede Partition (W_1, W_2) von $Y \setminus Y_1 : M/Y = M/(Y_1 \cup W_1) \setminus W_2$. Dual erhalten wir $M \setminus X = M \setminus (X_1 \cup Z_1)/Z_2$ für jede Partition (Z_1, Z_2) von $X \setminus X_1$. Also folgt die Behauptung aus Proposition 3.1.8. □

Proposition 3.3.6 *Unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas haben wir $M/Y \setminus X = M \setminus [X_1 \cup (Y \setminus Y_1)]/[Y_1 \cup (X \setminus X_1)]$. Außerdem sind $X_1 \cup (Y \setminus Y_1)$ und $Y_1 \cup (X \setminus X_1)$ counabhängig bzw. unabhängig.*

Beweis. Zu zeigen ist nur die letzte Behauptung. Da jedes Element von $X \setminus X_1$ in $M \setminus X_1$ eine Coschleife, also eine Brücke, ist, ist $Y_1 \cup X \setminus X_1$ unabhängig in $M \setminus X_1$ also erst recht in M. Die Counabhängigkeit folgt mittels Dualität. □

Nach diesen Vorbereitungen haben wir die Hauptarbeit für den Beweis des Satzes vom Abschaum schon geleistet.

Satz 3.3.7 (Satz vom Abschaum) *Sei M_1 ein einfacher Minor eines Matroid $M = (E, \mathcal{I})$. Dann hat M einen Unterraum F vom Rang $r(M) - r(M_1)$, so daß es eine ordnungstreue Injektion von $\mathcal{L}(M_1)$ nach $[F, 1_M]$ gibt.*

Beweis. Sei $M_1 = M \setminus X/Y$. Nach Proposition 3.3.6 können wir oBdA. annehmen, daß Y unabhängig und X counabhängig ist. Somit haben wir $r(M_1) = r(M) - |Y|$. Sei $F = \mathrm{cl}\,(Y)$, da M_1 einfach ist haben wir $F \subseteq X \cup Y$ und $M_1 = M/F \setminus (X \setminus F)$. Also ist $\phi : \mathcal{L}[M_1] \to [F, 1_M]$ definiert durch $\phi(Z) = \mathrm{cl}\,(Z \cup F)$ injektiv und ordnungstreu. □

Wir wollen dieses Kapitel beschließen mit der Überlegung, wie man aus einer geometrischen Repräsentierung eines Matroids eine Repräsentierung eines Kontraktionsminors M/e gewinnen kann. Sei dazu H eine Hyperebene, die e nicht enthält. Ist $f \in E \setminus H$ und schneidet die Gerade $\mathrm{cl}_M(\{f, e\})$ H in g, so addieren wir für f eine Parallele zu g, ansonsten wir f zu einem neuen Punkt auf H. Außerdem werden alle Punkte (außer e) einer Geraden, die e enthält zu einer Parallelitätsklasse und Ebenen, die e enthalten zu Geraden.

Beispiel 3.3.8 *Kontrahiert man bei der S_8 das Element an der Spitze, so erhält man F_7, die Fano-Ebene. Kontrahiert man hingegen das zentrale Element e, so erhält man das graphische Matroid des C_4 mit drei Doppelkanten.*

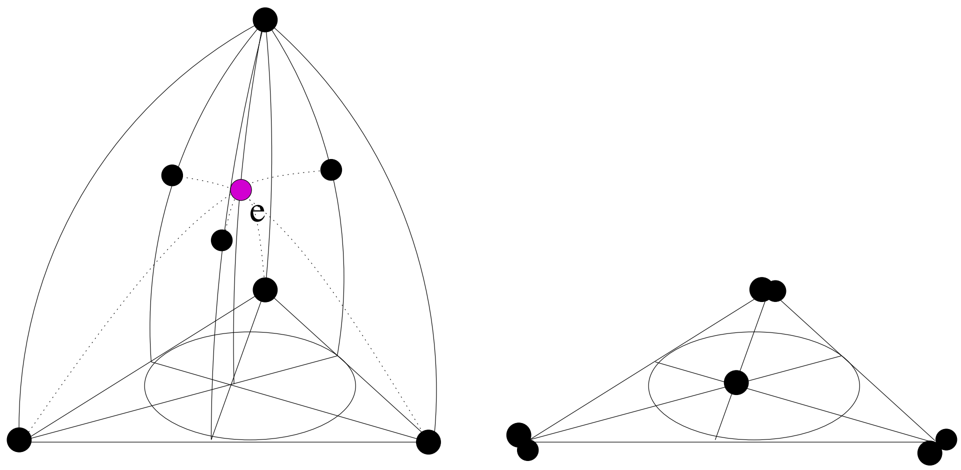

Abbildung 3.3: Geometrische Realisierung eines Kontraktionsminors