Kapitel 2

Dualität

Wir hatten bei Graphen das Kreismatroid eingeführt und versprochen, daß es zu einem Graphen noch ein weiteres Matroid geben würde. Bei planaren Graphen ist dies das Kreismatroid des dualen Graphen. Wählt man eine Repräsentierung A des Graphen über einem Körper $\mathbb{K}$, so definiert der Kern von A die Familie seiner Kreise und damit das Matroid. Das duale Matroid erhält man, wie wir im Laufe des Kapitels einsehen werden, wenn man die Familie der „Cokreise“ betrachtet, die durch das Bild von A definiert wird.

2.1 Abstrakte Dualität

Zunächst wollen wir ein Dual für ein beliebiges Matroid einführen. Betrachten wir dazu zunächst noch einmal Axiom (B2).

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\, \forall e \in B_1 \setminus B_2\, \exists f \in B_2 \setminus B_1 :\ B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}.$

Hier wird zunächst die Basis verkleinert und dann wieder aufgefüllt. Gehen wir umgekehrt vor, so erhalten wir einen Kreis, aus dem wir ein Element entfernen können:

Proposition 2.1.1 *Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Basen eines Matroid. Dann gilt*

(B2)* $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\, \forall e \in B_2 \setminus B_1\, \exists f \in B_1 \setminus B_2 :\ B_1 \cup e \setminus f \in \mathcal{B}.$

Beweis. Wir wählen $f \in C(B_1, e) \setminus B_2 \neq \emptyset$ und die Behauptung folgt mit Proposition 1.1.8. $\square$

Die Bedingung (B2)* ist aber komplementär zu (B1):

Satz 2.1.2 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}^*(M) := \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}(M)\}$. Dann ist $\mathcal{B}^*(M)$ die Familie der Basen eines Matroids.*

Beweis. Offensichtlich erfüllt $\mathcal{B}^*(M)$ (B1). Sei nun $e \in (E \setminus B_1) \setminus (E \setminus B_2) = B_2 \setminus B_1$. Nach (B2)* gibt es $f \in B_1 \setminus B_2 = (E \setminus B_2) \setminus (E \setminus B_1)$ mit $B_1 \cup e \setminus f \in \mathcal{B}(M)$ und somit $E \setminus (B_1 \cup e \setminus f) = (E \setminus B_1) \setminus e \cup f \in \mathcal{B}^*(M)$. □

Definition 2.1.3 *Das Matroid aus dem letzten Satz, dessen Grundmenge $E(M)$ ist, heißt das* Dual *von M notiert als M^*. Die Basen von M^* heißen* Cobasen *von M, die Kreise* Cokreise *usw.*

Proposition 2.1.4 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt:*

1. $(M^*)^* = M$;
2. $X \in \mathcal{I}(M) \Leftrightarrow cl_{M^*}(E \setminus X) = E$;
3. $cl_M(X) = E \Leftrightarrow E \setminus X \in \mathcal{I}(M^*)$;
4. *X ist eine Hyperebene von M* $\Leftrightarrow E \setminus X \in \mathcal{C}(M^*)$;
5. $X \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow E \setminus X$ *ist eine Hyperebene von M^*.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar, die zweite erhalten wir aus $X \in \mathcal{I}(M) \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}(M) : X \subseteq B \Rightarrow \exists B^* \in \mathcal{B}(M^*) : B^* \subseteq (E \setminus X) \overset{1.2.24}{\Rightarrow} \mathrm{cl}_{M^*}(E \setminus X) = E$. Die dritte Aussage erhalten wir aus 2.) durch Vertauschen der Rollen von M und M^*, sowie X und $E \setminus X$. Rest Übung. □

Im folgenden werden wir anstatt $\mathcal{B}(M^*)$ kürzer $\mathcal{B}^*$ usw. schreiben.

Proposition 2.1.5 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt*

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X).$$

Beweis. Seien I, I^* eine Basis von $(E \setminus X)$ bzw. eine Cobasis von X. Da $I \in \mathcal{I}(M_{|E \setminus I^*})$, kann man es dort zu einer Basis B ergänzen. Nach Proposition 2.1.4 ist $\mathrm{cl}_M(E \setminus I^*) = E$ und somit B Basis von M und $I \subseteq B$. Offensichtlich ist

$(B \setminus I) \subseteq X$. Außerdem, da $I^* \subseteq (E \setminus B) \in \mathcal{B}^*$ und I^* Cobasis von X ist, gilt $|X \cap (E \setminus B)| = |I^*|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B| + |X \cap (E \setminus B)| \\ &= |B| - |I| + |I^*| \\ &= r(M) - r(E \setminus X) + r^*(X). \end{aligned}$$

□

Wie oben angedeutet kann man bei linearen Matroiden Kreise und Cokreise mit Kern und Bild der Repräsentationsmatrix „identifizieren“. Deren Orthogonalität spiegelt sich in folgender Aussage wieder:

Proposition 2.1.6

$$C \in \mathcal{C},\ C^* \in \mathcal{C}^* \Rightarrow |C \cap C^*| \neq 1.$$

Beweis. Sei $x \in C \cap C^*$. Dann ist, da $E \setminus C^*$ eine Hyperebene ist, $x \notin \mathrm{cl}\,(E \setminus C^*) \overset{2.1.4}{=} E \setminus C^* \overset{1.2.25}{\Rightarrow} C \setminus x \not\subseteq (E \setminus C^*)$. □

Mit Basen und Kreisen haben wir zwei Mengenfamilien kennengelernt, bei denen kein Mitglied der Familie ein anderes enthält.

Definition 2.1.7 *Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{A} \subseteq 2^E$ eine Familie, die (C2) erfüllt. Dann sagen wir $\mathcal{A}$ ist ein* Clutter*. Der Clutter $\mathcal{A}'$ der Komplemente von Mengen in $\mathcal{A}$ heißt* Komplementclutter*. Der Clutter der inklusionsminimalen, nichtleeren Teilmengen X von E mit $\forall A \in \mathcal{A} : X \cap A \neq \emptyset$ heißt der* Blocker $b(\mathcal{A})$ von *$\mathcal{A}$.*

Neben der Familien der Kreise und Cokreise haben wir noch die Basen, Cobasen, Hyperebenen und Cohyperebenen als Clutter in einem Matroid, wobei Basen und Cobasen, Kreise und Cohyperebenen, sowie Cokreise und Hyperebenen komplementär sind. Basen und Cokreise stehen in Blockerbeziehung:

Proposition 2.1.8 *Sei $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ ein Clutter auf E und $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann gilt*

1. $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \Leftrightarrow b(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$,
2. $b(b(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$,
3. $\mathcal{C}^* = b(\mathcal{B}(M))$ *und* $\mathcal{B}(M) = b(\mathcal{C}^*)$,

4. *$\mathcal{C} = b(\mathcal{B}^*(M))$ und $\mathcal{B}^*(M) = b(\mathcal{C})$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$b(\mathcal{A}) = \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall X \subseteq E : (\exists D \in \mathcal{D} : D \subseteq X \Leftrightarrow \nexists A \in \mathcal{A} : A \subseteq E \setminus X);$$

Gilt $b(\mathcal{A}) = \mathcal{D}$ und $X \supseteq D \in \mathcal{D}$, so ist offensichtlich $D \cap (E \setminus X) = \emptyset$. Enthält andererseits $E \setminus X$ kein Element von $\mathcal{A}$, so trifft X jedes Element von $\mathcal{A}$, enthält also ein Element aus $\mathcal{D} = b(\mathcal{A})$. Erfüllt umgekehrt eine Familie die zweite Bedingung, dann besteht $\mathcal{D}$ aus den minimalen Mengen, die jedes Element von $\mathcal{A}$ treffen. (Beachte, daß $\mathcal{D}$ nach Voraussetzung ein Clutter ist. Ansonsten ist die Aussage falsch, wie die Familien $\mathcal{D} = \{\{1\}, \emptyset\}, \mathcal{A} = \emptyset$ zeigen.

Da die letzte Aussage symmetrisch bzgl. Komplementbildung ist, folgen die erste und die zweite Aussage. Zurück zu Matroiden. Nach Proposition 2.1.4 ist eine Menge X aufspannend genau dann, wenn $E \setminus X$ keinen Cokreis enthält. Mit 1.) folgt also, daß Basen und Cokreise sich blocken.

Die letzte Aussage erhält man wieder durch Übergang zum Dual. □

Da Hyperebenen genau die Komplemente von Cokreisen sind, kann man die Cokreisaxiome zu Hyperebenenaxiomen umschreiben.

Proposition 2.1.9 *Sei $\mathcal{H} \subseteq 2^E$. Dann ist $\mathcal{H}$ die Familie der Hyperebenen genau dann, wenn*

(H1) $E \notin \mathcal{H}$

(H2) *$\mathcal{H}$ ist ein Clutter.*

(H3) $\forall H_1, H_2 \in \mathcal{H}\, \forall e \in E \setminus (H_1 \cup H_2)\, \exists H_3 \in \mathcal{H} : H_1 \cap H_2 \cup e \subseteq H_3$.

□

Übung 2.1.10 *Sei E eine Menge und $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_k\} \subseteq 2^E$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine* m-Partition von E, *wenn*

- $\forall i = 1, \ldots, k : |T_k| \geq m$, *und*
- $\forall T \in \binom{E}{m} \exists! i \in \{1, \ldots k\} : T \subseteq T_i$.

Zeige: $M = (E, \mathcal{H})$ ist ein Paving Matroid vom Rang r genau dann, wenn seine Hyperebenen $\mathcal{H}$ eine $(r-1)$-Partition von E bilden.

Vor einem abschließenden Beispiel wollen wir noch notieren, daß Proposition 2.1.6 auch eine Art Rückrichtung hat.

Proposition 2.1.11 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann ist $D \in \mathcal{C}^* \Leftrightarrow D$ ist inklusionsminimal, nichtleer mit der Eigenschaft* $(\forall C \in \mathcal{C} : |C \cap D| \neq 1)$.

Beweis. Da wir wissen, daß jeder Cokreis nicht leer ist und die angegebene Eigenschaft hat, sowie ferner die Cokreise einen Clutter bilden, genügt es zu zeigen, daß jede nicht leere Menge D mit der angegebenen Eigenschaft einen Cokreis enthält. Angenommen $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap D = \emptyset$, so hätten wir für beliebiges $d \in D : |D \cap C(B, d)| = 1$. Somit haben wir $D \in b(\mathcal{B}) = \mathcal{C}^*$ nach Proposition 2.1.8. □

Diese Charakterisierung der Kreise in Abhängigkeit von den Cokreisen (oder umgekehrt) liefert einem so etwas wie Dualität von Homomorphismen. Wir werden kurz darauf eingehen.

Korollar 2.1.12 *Seien $M = (E, \mathcal{I})$ und $M = (E, \mathcal{I}')$ zwei Matroide auf der gleichen Grundmenge mit $\mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}(M')$. Dann ist $\mathcal{C}^*(M') \subseteq \mathcal{C}^*(M)$.*

□

Bemerkung 2.1.13 *Gilt $\mathcal{C}(M) \subseteq \mathcal{C}(M')$, so sagen wir, die Identität ist ein* starker Morphismus (strong map) *von M nach M'. Mehr über strong maps findet man in [6]. Im linearen Fall spiegelt dies folgende Situation wieder: Seien $V, V' \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorräume gegeben als Bild der Homomorphismen $h, h' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Gilt nun $Kern(h) \subseteq Kern(h')$ so ist $V' \subseteq V$ und wir haben den Homomorphismus:*

$$\begin{array}{rccc} g := h'_{|V} : & V & \to & V' \\ & v & \mapsto & h'(v). \end{array}$$

Diesen kann man betrachten als Einschränkung des globalen kanonischen Homomorphismus auf $\mathbb{R}^n$ mit Kern V/V'. Dessen duale Abbildung g^* vermittelt ebenso einen Homomorphismus von $V'^* \cong V'^\perp \to V^* = V^\perp$.

Definition 2.1.14 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann heißt M* selbstdual*, wenn $M \cong M^*$. M heißt* identisch selbstdual*, wenn $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, d.h. der Isomorphismus wird durch die Identität vermittelt.*

Beispiel 2.1.15 *Betrachten wir das Vámos-Matroid M und die Abbildung $\varphi(i) = (i+1)(mod\, 8) + 1$, so vermittelt diese einen Isomorphismus zwischen M und M^*.*

2.2 Lineare, graphische und transversale Duale

Das Dual eines uniformen Matroids ist uniform. In diesem Abschnitt wollen wir etwas weniger triviale Informationen über Duale wichtiger Matroidklassen sammeln.

2.2.1 Lineare Duale

In diesem Abschnitt wollen wir einsehen, daß das Dual eines $\mathbb{K}$-repräsentierbaren Matroids wieder $\mathbb{K}$-repräsentierbar ist. Dazu notieren wir zunächst:

Proposition 2.2.1 *Sei $m > n$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär. Dann ist $M[A] = M[UA]$.*

Beweis. Sei J eine Indexmenge mit $|J| = n$ und A_J die zugehörige quadratische Untermatrix. Dann ist nach linearer Algebra $rang(A) = rang(UA)$. Also

$$J \in \mathcal{B}(M[A]) \Leftrightarrow J \in \mathcal{B}(M[UA]).$$

Also ist das Vektormatroid invariant unter elementaren Zeilenoperationen. Außerdem kann man natürlich Spalten vertauschen, wenn man die Label mitschleppt. Speziell kann man immer annehmen, daß ein lineares Matroid als $[I_r|D]$ repräsentiert ist. Praktischerweise liefert einem diese Darstellung direkt eine Darstellung des Dual.

Satz 2.2.2 *Ist M das Vektormatroid der Matrix $(I_r|D)$, so ist $M^* = M[(-D^\top|I_{n-r})]$.*

Beweis. Zunächst ist das Produkt der i-ten Zeile von $(I_r|D)$ mit der j-ten Zeile von $(-D^\top|I_{n-r})$ gerade $-d_{ij} + d_{ij} = 0$. Aus Dimensionsgründen haben wir also

$$Kern((I_r|D)) = Bild((-D^\top|I_{n-r})).$$

Durch Übergang zum jeweiligen Orthogonalraum erhalten wir genauso

$$Bild((I_r|D)) = Kern((-D^\top|I_{n-r})).$$

Die Behauptung folgt nun aus folgendem Lemma:

Lemma 2.2.3 *Sei A eine Matrix von vollem Rang. Dann ist C^* ein Cokreis von $M[A]$ genau dann, wenn C^* inklusionsminimal, nichtleer mit folgender Eigenschaft ist: Es gibt eine Linearkombination der Zeilen von A mit Träger C^*.*

Beweis. Nach Proposition 2.1.4 ist C^* ein Cokreis genau dann, wenn $E \setminus C^*$ eine Hyperebene ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es eine Basis A_B der Matrix A gibt, so daß C^* genau aus den Indizes der Vektoren mit Nichtnulleintrag in der ersten Koordinate von $A_B^{-1}A$ besteht. □

Ende des Beweises von Satz 2.2.2

Korollar 2.2.4 *Ist M linear über $\mathbb{K}$, so ist auch M^* linear über $\mathbb{K}$.*

2.2.2 Graphische Duale

Definition 2.2.5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Das Dual $M^*(G)$ von $M(G)$ nennen wir das* Bondmatroid *oder auch* Cokreismatroid *von G. Ein Matroid, das isomorph zu einem Bondmatroid ist, heißt* cographisch.

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage nach dem Schnitt der graphischen mit den cographischen Matroiden widmen. Wir hatten in Beispiel 1.2.26 festgestellt, daß die Hyperebenen eines graphischen Matroids gerade die Komplemente minimaler Kantenschnitte sind. Nach Proposition 2.1.4 sind die Cokreise eines graphischen Matroids gerade die minimalen Kantenschnitte, die wir auch *Bond* [7] nennen wollen. Ist $v \in V$ ein Knoten, so bildet die Menge der Kanten, die mit v inzidiert, einen Bond. Solche Bonds nennen wir auch Knotenbond.

Wir wenden uns nun zwei Graphen zu, die in der Graphentheorie im Kontext planarer Graphen eine wesentliche Rolle spielen.

Proposition 2.2.6 *Weder $M^*(K_5)$ noch $M^*(K_{3,3})$ sind graphisch.*

Beweis. Angenommen es gäbe einen Graphen $G = (V, E)$ mit $M(G) \cong M^*(K_5)$. Nach Beispiel 1.2.26 dürfen wir annehmen, daß G zusammenhängend ist und $|V| - 1 = |E| - (5-1) = 6$ ist. Da $7 \cdot 3 > 10 \cdot 2$ ist, gibt es einen Knoten vom Knotengrad ≤ 2. Folglich hat $M^*(G) \cong M(K_5)$ einen Kreis mit höchstens zwei Elementen. Widerspruch. Analog erhalten wir für $K_{3,3} : |V| - 1 = |E| - (6-1) = 4$ und $5 \cdot 4 > 9 \cdot 2$ impliziert die Existenz eines Dreiecks in $K_{3,3}$. □

Daß $K_{3,3}$ und K_5 auch nicht planar sind, ist kein zufälliges Zusammentreffen:

Satz 2.2.7 *Ist $G = (V, E)$ planar, so ist $M^*(G)$ graphisch.*

[7] Bond, James Bond

Beweis. Wir konstruieren einen Graphen, dessen Kreismatroid $M^*(G)$ ist. Sei f eine Einbettung von G und F die Menge der Gebiete dieser Einbettung. Wir definieren den Graphen $G^* = (F, E)$ vermöge $\psi^*(e) := \{x \in F \mid f(e)$ liegt im topologischen Abschluß von $x\}$. Den so definierten planaren(!) Graphen $G^* = (F, E, \psi^*)$ nennen wir *Dualgraph von* G.

Sei nun C ein Kreis in G. Wir müssen zeigen, daß die zugehörige Kantenmenge ein Bond in G^* ist. In der Einbettung von G bildet der Kreis C einen geschlossenen Jordanbogen und für jede Kante von C liegt in $f^*(G^*)$ ein Ende im Innengebiet von C und das andere im Außengebiet. C bildet also in $M^*(G)$ einen Kantenschnitt, der die Menge der Innengebiete von $f^*(C)$ von der Menge der Außengebiete trennt. Offensichtlich ist dieser Schnitt minimal.

Ist nun umgekehrt B ein Bond in G^*, so trennt er die Menge der Gebiete in F_1 und F_2. Nun enthält eine Menge $\tilde{B}$ einen Kreis in G genau dann, wenn $\mathbb{R}^2 \setminus f(\tilde{B})$ unzusammenhängend ist. Angenommen dies wäre für $f(B)$ nicht der Fall. Sei $g_1 \in F_1$ und $g_2 \in F_2$. Nach Annahme gibt es eine stetige Kurve von g_1 nach g_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus f(B)$. Offensichtlich induziert dieser einen Spaziergang in G^* von g_1 nach g_2, der keine Kante von B benutzt. Widerspruch. Da ein Kreis in G einen Bond in G^* induziert, folgt die Behauptung. $\square$

Im Beweis haben wir zusätzlich gezeigt

Korollar 2.2.8 *Ist $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $G^*(F, E)$ ein geometrisches Dual so ist $M^*(G) = M(G^*)$.*

2.2.3 Transversale Duale

Zunächst werden wir uns überlegen, daß ein Transversalmatroid M eine Repräsentierung $A_1, \ldots, A_{r(M)}$ hat:

Lemma 2.2.9 *Sei $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ eine Familie von Teilmengen von S und T eine maximale partielle Transversale von $\mathcal{A}$. Ist dann T eine Transversale von $\mathcal{A}' = (A_{i_1}, \ldots, A_{i_t})$, wobei $i_j \neq i_k$ für $j \neq k$ und $J' := \{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq J := \{1, \ldots, m\}$. Dann ist $M[\mathcal{A}] = M[\mathcal{A}']$.*

Beweis. Sei $\Delta[\mathcal{A}]$ der bipartite Graph von $\mathcal{A}$. In diesem Graphen gibt es ein Matching M_T, das genau die Knoten in J' saturiert. Wir haben zu zeigen, daß dies für jede maximale partielle Transversale von $\mathcal{A}$ gilt. Sei also T' eine maximale partielle Transversale, und M_T' ein zugehöriges Matching. Da T und T' maximal sind, besteht $M_T \Delta M_{T'}$ aus alternierenden Kreisen und paarweise disjunkten, alternierenden Pfaden ungerader Länge. Seien $P_1, \ldots, P_s$ die alternierenden Pfade, deren

Endknoten beide in J liegen. Dann ist $M_{T'}\Delta P_1\Delta \dots \Delta P_s$ ein Matching für T', das alle Knoten in J' saturiert. □

Definition 2.2.10 *Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $X, Y \subseteq V$ mit $|X| = |Y|$. Dann sagen wir X* ist mit Y verbunden, *wenn es $|X|$ knotendisjunkte (gerichtete) Pfade gibt, die in X beginnen und in Y enden. Ist $Z \subseteq V$, so sagen wir X* ist nach Z verbunden, *wenn es mit $Y \subseteq Z$ verbunden ist. Sei nun $B_0 \subseteq V$ fest. Dann ist $L(G, B_0)$ die Menge aller Teilmengen von V, die nach B_0 verbunden sind.*

Zu einem gerichteten Graphen G betrachten wir folgenden bipartiten Graphen $\hat{G}$: Sei $\hat{V}$ eine disjunkte Kopie von V und $E := \{v\hat{v} \mid v \in V\} \cup \{v\hat{u} \mid (u, v) \in A(G)\}$ und $\hat{G} = (V \cup \hat{V}, E)$.

Lemma 2.2.11 *Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $\hat{G}$ wie eben definiert. Seien $X, Y \subseteq V$. Dann ist X mit Y verbunden genau dann, wenn $V \setminus X$ mit $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ in $\hat{G}$ gematched ist.*

Beweis. Sei zunächst $\{P_x \mid x \in X\}$ eine Familie knotendisjunkter gerichteter Wege von X nach Y. Betrachte folgende Bijektion(!) von $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ nach $V \setminus X$ in $\hat{G}$:

$$\psi(\hat{u}) := \begin{cases} v, & \text{falls (u,v) eine Kante auf einem der } P_x \text{ ist.} \\ u, & \text{falls u auf keinem der Pfade liegt.} \end{cases}$$

Da offensichtlich für alle $u \in \hat{V} \setminus \hat{Y}$ $(u, \psi(u))$ eine Kante von $\hat{G}$ ist, folgt eine Implikation.

Sei also umgekehrt ein Matching M zwischen $\hat{V} \setminus \hat{Y}$ und $V \setminus X$. Für $X \cap Y$ haben wir triviale Pfade. Sei also $x \in X \setminus Y$. Dann ist $\psi(x) \neq \hat{x}$, entspricht also einer Kante (x, y). Betrachte nun $(y, \psi(y))$. Auf diese Weise können wir einem Pfad in G folgen. Dieser hat erst dann keine Fortsetzung mehr, wenn für ein u der Originalknoten von $\psi(u)$ nicht im Matching ist, also $\psi(u) \in Y$.

Offensichtlich sind diese Pfade knotendisjunkt. □

Satz 2.2.12 *Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $B_0 \subseteq V$. Dann ist $M = (V, L(G, B_0))$ ein Matroid und M^* ist ein Transversalmatroid. Ist umgekehrt M^* ein Transversalmatroid, und B_0 eine Basis von M, dann gibt es einen gerichteten Graphen $G = (V, A)$, $B_0 \subseteq V$ mit $M \cong (V, L(G, B_0))$.*

Beweis. Die Komplemente der maximalen Mengen in $L(G, B_0)$ sind genau die Knotenmengen $B^* = V \setminus B$, die in $\hat{G}$ nach $\hat{V} \setminus \hat{B}_0$ gematched werden können. Die Rückrichtung ist genauso einfach. □

Definition 2.2.13 *Sei $G = (V, A)$ ein Digraph und $B_0 \subseteq V$. Dann heißt das Matroid*

$$M = (V, L(G, B_0))$$

ein strenges Gammoid.

Korollar 2.2.14 *Ein Matroid ist ein strenges Gammoid genau dann, wenn sein Dual transversal ist.*