Kapitel 1

Definitionen und Beispiele

In der Matroidtheorie gibt es kein Standardaxiomensystem. Das liegt daran, daß bei unterschiedlichem Zugang sich verschiedene Strukturen in den Matroiden zur Axiomatisierung anbieten. Da die eine Struktur die andere jeweils impliziert, bezeichnet man diese Axiomensysteme als *kryptomorph*, da sie implizit die gleiche Struktur definieren. Wir werden im nächsten Abschnitt die Unabhängigkeitsaxiome, die durch die lineare Algebra motiviert sind, und die Kreisaxiome, die bei einem graphentheoretischen Zugang näherliegend sind, kennenlernen und ihre Äquivalenz beweisen.

1.1 Unabhängige Mengen und Kreise

Definition 1.1.1 *Ein* Matroid M *ist ein geordnetes Paar* $(E,\mathcal{I})$*, bestehend aus einer endlichen Menge* E *und einer Mengenfamilie* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ *mit*

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $I \in \mathcal{I}$ *und* $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,

(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ *und* $|I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Bedingung (I3) nennen wir Basisergänzungsaxiom.

Ist $M = (E,\mathcal{I})$ *ein Matroid, so sagen wir auch* M *ist ein Matroid auf* E*. Die Mengen in* $\mathcal{I}$ *sind die* unabhängigen Mengen *von* M*, und* E *ist die* Grundmenge *von* M*. Werden mehrere Matroide betrachtet, so unterscheiden wir die entsprechenden Familien bzw. Mengen durch die Schreibweise* $\mathcal{I}(M)$ *und* $E(M)$*. Die Mengen in* $2^E \setminus \mathcal{I}$ *heißen* abhängig.

Wie oben und durch die Namensgebung bereits angedeutet, sind diese Axiome durch Betrachtung der „Unabhängigkeitsstruktur“ von Mengen von Vektoren in einem Vektorraum motiviert. Der Name „Matroid“ stammt daher, daß man endlich viele Vektoren als Spalten in einer Matrix zusammenfassen kann.

Proposition 1.1.2 *Sei E die Menge der Spaltenlabel einer Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $\mathcal{I}$ die Menge der Teilmengen I von E, bei denen die Multimenge der mit Elementen aus I gelabelten Spalten linear unabhängig in dem Vektorraum $\mathbb{K}^m$ ist. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.*

Beweis. Offensichtlich erfüllt $\mathcal{I}$ die Axiome (I1) und (I2). Zur Verifikation von (I3) seien $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Nach dem Basisergänzungssatz der linearen Algebra läßt sich I_1 mit Elementen aus $I_1 \cup I_2$ zu einer Basis B von $\langle I_1 \cup I_2 \rangle$ ergänzen. Aus Dimensionsgründen ist $B \setminus \langle I_1 \rangle = B \setminus I_1 \neq \emptyset$. Jedes $e \in B \setminus I_1$ erfüllt dann die Behauptung. □

Das Matroid, das wir aus der Matrix A erhalten, bezeichnen wir mit $M[A]$ und nennen es das *Vektormatroid* von A.

Beispiel 1.1.3 *Betrachten wir folgende Matrix über $GF(2)$:*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dann ist $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{I} = \{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Die Familie der abhängigen Mengen dieses Matroids ist also

$$\{X \subseteq E \mid \{4\} \subseteq X \text{ oder } \{1, 2\} \subseteq X\}.$$

Also sind $\{4\}$ und $\{1, 2\}$ die minimal abhängigen Mengen*, das sind solche abhängige Mengen, deren Teilmengen alle unabhängig sind.*

Definition 1.1.4 *Ein* Kreis *in einem Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ ist eine minimal abhängige Teilmenge $C \subseteq E$. Die Menge aller Kreise in M bezeichnen wir mit $\mathcal{C}$ oder mit $\mathcal{C}(M)$. Ist C ein Kreis mit $|C| = n$, so nennen wir n auch die* Länge *von C.*

Offensichtlich ist die Familie der Kreise eines Matroids wohldefiniert. Andererseits kann man aus der Familie der Kreise auch die Familie der unabhängigen Mengen rekonstruieren, nämlich als Familie der Mengen I, die keine Menge $C \in \mathcal{C}$ enthalten.

Lemma 1.1.5 *Sei $\mathcal{C}$ die Familie der Kreise eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$, *und*

(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ *und* $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$,

(C3) $\forall C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}\, \forall e \in C_1 \cap C_2\, \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e$.

Beweis. (C1) und (C2) folgen unmittelbar aus der Definition eines Kreises. Seien also C_1 und C_2 verschiedene Kreise und $e \in C_1 \cap C_2$. Angenommen $(C_1 \cup C_2) \setminus e$ wäre unabhängig. Sei dann $f \in C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$ (nach (C2)). Da C_2 ein Kreis ist, gilt $C_2 \setminus f \in \mathcal{I}$. Sein nun $I \in \mathcal{I}$ maximal gewählt mit der Eigenschaft, daß $f \notin I \subseteq C_1 \cup C_2$. Da $C_1 \not\subseteq I$ ist, folgt $|I| < |(C_1 \cup C_2) \setminus e|$ im Widerspruch entweder zur Maximalität von I oder zum Basisergänzungsaxiom (I3). □

Die Bedingung (C3) heißt *schwaches Kreiseliminationsaxiom*. Dies deutet bereits an, daß (C1),(C2) und (C3) die Familie der Kreise eines Matroids charakterisieren:

Satz 1.1.6 *Sei E eine endliche Menge und $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilmengen von E, die (C1),(C2) und (C3) erfüllt. Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ die Familie derjenigen Teilmengen I von E, die kein Element C von $\mathcal{C}$ enthalten. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Menge seiner Kreise.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{I}$ die Axiome (I1),(I2) und (I3) erfüllt. In den ersten beiden Fällen ist dies klar. Seien also $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Da $I_2 \in \mathcal{I}$ ist, gibt es $I \subseteq (I_1 \cup I_2)$ mit $I \in \mathcal{I}$ und $|I| > |I_1|$. Sei ein solches I gewählt mit $k = |I_1 \setminus I|$ minimal. Gilt $k = 0$ sind wir fertig. Ansonsten sei $e \in I_1 \setminus I$. Seien nun $f_1, f_2 \in I \setminus I_1$ mit $f_1 \neq f_2$. Dann sind $X_{f_i} := I \setminus f_i \cup e$ Mengen mit $|X_{f_i}| > |I_1|, X_{f_i} \subseteq I_1 \cup I_2$ und $|I_1 \setminus X_{f_i}| < |I_1 \setminus I|$. Also sind beide X_{f_i} abhängig. Seien $C_{f_i} \subseteq X_{f_i}$ Kreise. Da die Mengen $X_{f_i} \setminus e \subseteq I$ unabhängig sind, haben wir $e \in C_{f_1} \cap C_{f_2}$. Nach (C3) gibt es ein $\mathcal{C} \ni C' \subseteq ((C_{f_1} \cup C_{f_2}) \setminus e) \subseteq I \in \mathcal{I}$. Dieser Widerspruch impliziert die Gültigkeit von (I3). Daß $\mathcal{C}$ genau die Menge der Kreise dieses Matroids ist, folgt sofort aus der paarweisen Äquivalenz der folgenden Aussagen.

1. C ist ein Kreis,
2. $C \notin \mathcal{I}$ und $\forall x \in C : C \setminus x \in \mathcal{I}$,
3. $\exists C' \in \mathcal{C} : C' \subseteq C$ aber $C' \not\subset C$,
4. $C \in \mathcal{C}$.

□

Aus 1.1.6 und 1.1.5 erhalten wir insgesamt folgendes

Korollar 1.1.7 *Sei $\mathcal{C} \subseteq 2^E$. Dann ist $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise eines Matroids auf E genau dann, wenn $\mathcal{C}$ (C1),(C2) und (C3) erfüllt.*

Ein Kreis, der aus einer unabhängigen Menge durch Hinzunahme eines Elementes entsteht, ist eindeutig:

Proposition 1.1.8 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $I \in \mathcal{I}, e \in E$ und $I \cup e \notin \mathcal{I}$. Dann gibt es genau einen Kreis $C(I, e) \subseteq I \cup e$ und es gilt $e \in C(I, e)$.*

Beweis. Zu zeigen ist nur die Eindeutigkeit. Angenommen, es gäbe zwei solcher Kreise C und C', dann enthielte nach $(C3)$ die Menge $((C \cup C') \setminus e) \subseteq I$ einen Kreis. Widerspruch. □

Wie der Name der minimalen abhängigen Mengen und 1.1.3 schon andeuten, ist die Betrachtung der Familie aller Kreise aus der Graphentheorie motiviert:

Proposition 1.1.9 *Sei E die Menge der Kanten eines Graphen $G = (V, E)$ und $\mathcal{C}$ die Menge der Kantenmengen von Kreisen des Graphen. Dann ist $\mathcal{C}$ die Menge der Kreise eines Matroids.*

Beweis. Wiederum sind (C1) und (C2) trivial. Seien also C_1, C_2 Kantenmengen verschiedener Kreise in G und $e \in C_1 \cap C_2$. Betrachte den Graphen $G' = G[C_1 \Delta C_2] = G'(V', E')$. Dann gilt $\forall v' \in V' : d_{G'} \geq 2$ und $e \notin E'$. Offensichtlich muß G' also einen Kreis mit Kantenmenge wie in (C3) verlangt enthalten. □

Dieses Matroid, das wir aus einem Graphen erhalten, nennen wir *Kreismatroid* oder *Polygonmatroid* $M(G)$ von G. Die unabhängigen Mengen von $M(G)$ sind offensichtlich die Kantenmengen von Teilgraphen von G, die Wälder sind. Wir werden im folgenden im Zusammenhang mit Matroiden von Kreisen, Wäldern oder Bäumen sprechen, wenn wir „nur" deren Kantenmengen meinen.

Vergleichen wir das Kreismatroid des Graphen in Abbildung 3 mit dem Vektormatroid in Beispiel 1.1.3, so erkennen wir, daß die Bijektion $\psi(e_i) = i$ die Kreise von $M(G)$ genau auf die Kreise von $M[A]$ und also auch die unabhängigen Mengen auf die unabhängigen Mengen abbildet. Allgemein definieren wir:

Definition 1.1.10 *Zwei Matroide $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1), M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ heißen* isomorph*, in Zeichen $M_1 \cong M_2$, wenn es eine Bijektion $\psi : E_1 \to E_2$ gibt mit*

$$I \in \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow \psi(I) := \{\psi(e) \in E_2 \mid e \in I\} \in \mathcal{I}_2.$$

Ein Matroid, das isomorph zu einem Kreismatroid ist, heißt *graphisch*. Ist ein Matroid M isomorph zu dem Vektormatroid $M[A]$ einer Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}$, so sagen wir M ist *linear über* $\mathbb{K}$ oder *repräsentierbar über* $\mathbb{K}$ oder einfach $\mathbb{K}$-*repräsentierbar*. Ein Matroid ist *linear*, wenn es einen Körper $\mathbb{K}$ gibt, über dem es linear ist.

Nicht jedes Matroid ist linear. Ganz im Gegenteil, es gibt dafür einfach „zu viele“ Matroide. Üblicherweise mißt man die Größe eines Matroids durch die Anzahl seiner Elemente $n = |E|$. Oxley gibt Referenzen auf Arbeiten [5],[8], in denen folgendes gezeigt wird:

> *Bezeichne $f(n)$ die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit n Elementen. Dann gilt*
>
> $$\begin{aligned} n - \frac{3}{2}\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n) &\leq \log_2 \log_2 f(n) \\ &\leq n - \log_2 n + O(\log_2 \log_2 n). \end{aligned}$$

Also ist $f(n)$ von der Größenordnung 2^{2^n}.

Definition 1.1.11 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Menge seiner Kreise. Seien $e, f, g \in E$. Dann sagen wir e, f sind* parallel*, falls $\{e, f\} \in \mathcal{C}$, g ist eine* Schleife*, falls $g \in \mathcal{C}$. Wegen (C3) ist die Relation*

$$e \sim f \Leftrightarrow e, f \text{ sind parallel}$$

eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Klassen heißen Parallelenklassen. *Ein Matroid heißt* einfach *oder auch* kombinatorische Geometrie*, wenn es keine Schleifen hat und alle Parallelenklassen trivial sind, d.h. aus einem Element bestehen.*

Übung 1.1.12 *Betrachte die Matrix*

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sei $M_q[A]$ das Vektormatroid der Matrix A betrachtet als Matrix über GF(q) für $q \in \{2, 3\}$. Zeige:

1. *Die Familien der Kreise von $M_2[A]$ und $M_3[A]$ sind verschieden.*

2. *$M_2[A]$ ist graphisch und $M_3[A]$ ist nicht graphisch.*

3. *$M_2[A]$ ist GF(3)-repräsentierbar aber $M_3[A]$ ist nicht GF(2)-repräsentierbar.*

Definition 1.1.13 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, dann sagen wir*

$$M \textit{ ist } \left\{ \begin{array}{c} \textit{binär,} \\ \textit{ternär,} \\ \textit{regulär,} \end{array} \right\} \textit{ wenn es über } \left\{ \begin{array}{c} GF(2) \\ GF(3) \\ \textit{jedem Körper } \mathbb{K} \end{array} \right\} \textit{ linear ist.}$$

Übung 1.1.14 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $M(G)$ sein Polygonmatroid und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige $M(G)$ ist $\mathbb{K}$-repräsentierbar.*

1.2 Basen, Rang und Abschluß

Definition 1.2.1 *Sei $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid, dann heißt $B \in \mathcal{I}$* Basis, *wenn es kein $I \in \mathcal{I}$ gibt mit $B \subset I$. Die Familie der Basen bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$.*

Die Familie der Basen spiegelt die „Dimension“ des Matroids wieder:

Lemma 1.2.2 *Sind B_1 und B_2 Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$, so ist $|B_1| = |B_2|$.*

Beweis. Die Annahme $|B_1| < |B_2|$ liefert mit (I3) sofort einen Widerspruch zur Maximalität von B_1. $\square$

Wiederum kann man die Familie der Basen axiomatisch beschreiben:

Lemma 1.2.3 *Sei $\mathcal{B}$ die Familie der Basen eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$. Dann gilt*

(B1) *$\mathcal{B} \neq \emptyset$, und*

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\, \forall e \in B_1 \setminus B_2\, \exists f \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$.

Beweis. Da $\emptyset \in \mathcal{I}$ ist, gilt (B1). Sei $e \in B_1 \setminus B_2$. Nach Lemma 1.2.2 ist $|B_1 \setminus e| < |B_2|$. Nach (I3) gibt es ein $f \in B_2 \setminus (B_1 \setminus e) = B_2 \setminus B_1$ mit $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{I}$. Wiederum wegen Lemma 1.2.2 haben wir sogar $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$. $\square$

Den Beweis, daß (B1) und (B2) die Basen eines eindeutigen Matroids charakterisieren, bereiten wir durch folgendes Lemma vor:

Lemma 1.2.4 *Sei $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ mit (B1) und (B2) und $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Dann gilt $|B_1| = |B_2|$.*

Beweis. Angenommen es gäbe B_1, B_2 mit $|B_2| < |B_1|$. Wir wählen unter allen solchen Paaren eines mit $|B_1 \setminus B_2|$ minimal. Sei nun $e \in B_1 \setminus B_2$. Nach (B2) gibt es $f \in B_2 \setminus B_1$ mit $(B_1 \setminus e \cup f) \in \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Wahl von B_1 und B_2.
□

Satz 1.2.5 *Sei $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ mit (B1) und (B2). Sei*

$$\mathcal{I} := \{I \in 2^E \mid \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}.$$

Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{B}$ die Menge seiner Basen.

Beweis. (B1) impliziert (I1), und (I2) ist per definitionem klar. Angenommen (I3) wäre verletzt und $|I_1| < |I_2|$ bildeten ein Gegenbeispiel. Wir wählen nun $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $I_i \subseteq B_i$ und $|B_2 \setminus (I_2 \cup B_1)|$ minimal. Da für alle $e \in I_2 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$ ist, gilt

$$I_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \tag{1.1}$$

Angenommen $B_2 \setminus (I_2 \cup B_1) \neq \emptyset$, sei dann e aus dieser Menge. Nach (B2) gibt es $f \in B_1$ mit $B_2 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$ im Widerspruch zur Wahl von B_1, B_2. Somit impliziert (1.1)

$$B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1. \tag{1.2}$$

Angenommen $B_1 \setminus (I_1 \cup B_2) \neq \emptyset$, und e aus dieser Menge. Wiederum gibt es $f \in B_2 \setminus B_1 = I_2 \setminus I_1$ mit $B_1 \setminus e \cup f \in \mathcal{B}$. Dies impliziert , daß $I_1 \cup f \in \mathcal{I}$ im Widerspruch zur Annahme, daß I_1 und I_2 ein Gegenbeispiel bilden. Wir erhalten somit

$$B_1 \setminus B_2 \subseteq I_1 \setminus I_2. \tag{1.3}$$

Mit Lemma 1.2.2 erhalten wir folgende Ungleichungskette:

$$|I_2 \setminus I_1| \overset{1.2}{=} |B_2 \setminus B_1| \overset{1.2.2}{=} |B_1 \setminus B_2| \overset{1.3}{\leq} |I_1 \setminus I_2|.$$

Dies impliziert aber $|I_1| \geq |I_2|$. Widerspruch. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ wieder die Menge der Basen des Matroids. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 1.2.6 *Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ ist genau dann die Menge der Basen eines Matroids, wenn sie (B1) und (B2) erfüllt.*

Wir hatten schon angedeutet, daß Proposition 1.1.8 vor allem für Basen interessant ist:

Definition 1.2.7 *Sei B eine Basis in einem Matroid $(E, \mathcal{I})$ und $e \in E \setminus B$. Den nach 1.1.8 eindeutigen Kreis $C(B,e)$ nennen wir* Fundamentalkreis *von e bzgl. B.*

Übung 1.2.8 *Sei C ein Kreis in einem Matroid $M = (E, \mathcal{I})$. Zeige:*

$$\forall e \in C\, \exists B \in \mathcal{B} : \; C = C(B,e).$$

Beispiel 1.2.9 *Seien $0 \leq m \leq n$ ganze Zahlen. Sei E eine Menge mit $|E| = n$ und $\mathcal{B} = \binom{E}{m}$ die Menge aller m-elementigen Teilmengen von E. Trivialerweise erfüllt $\mathcal{B}$ (B1) und (B2). Das zugehörige Matroid nennen wir das* uniforme Matroid vom Rang m mit n Elementen $\mathcal{U}_{m,n}$. *Ist $m = n$ so nennen wir $\mathcal{U}_{n,n}$ das* freie Matroid *mit n Elementen.*

Übung 1.2.10 *Beschreibe Kreise und unabhängige Mengen des uniformen Matroids $\mathcal{U}_{m,n}$.*

Hat man ein Vektormatroid A, so kann man offensichtlich auch Matroide auf Teilmengen der Spaltenmenge betrachten. Überträgt man dies auf ein allgemeines Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ für $F \subseteq E$, so sieht man z.B. direkt, daß die Familie

$$\mathcal{I}(M_{|F}) := \{I \subseteq F \mid I \in \mathcal{I}\}$$

die Unabhängigkeitsaxiome aus Definition 1.1.1 erfüllt.

Definition 1.2.11 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $F \subseteq E$. Das Matroid $M_{|F} := (F, \mathcal{I}(M_{|F}))$ nennen wir die* Restriktion von M auf F *und sagen auch $M_{|F}$ entsteht durch* Löschen von $E \setminus F$. *Neben $M_{|F}$ schreiben wir dafür auch $M \setminus (E \setminus F)$.*

Ist $X \subseteq E$ so können wir wegen Lemma 1.2.2 den Rang $r(X)$ *definieren als*

$$r(X) := |B_X| \textit{ für ein } B_X \in \mathcal{B}(M_{|X}).$$

Die Rangfunktion ermöglicht es uns,die „Dimension“ einer Teilmenge zu betrachten. Auch die Rangfunktion liefert ein Axiomensystem. Das Axiom (R3) spiegelt den Dimensionssatz der Linearen Algebra

$$\dim(\langle U \cup V \rangle) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V),$$

d.i. die *Modularität* des Unterraumverbandes eines Vektorraumes wieder. Da in Matroiden fehlende Punkte im Schnitt zur Dimensionserniedrigung führen können, erhalten wir eine Ungleichung:

Lemma 1.2.12 *Die Rangfunktion eines Matroids $M = (E, \mathcal{I})$ ist nicht-negativ,* subkardinal, monoton und submodular, *d.h. sie erfüllt die folgenden Bedingungen:*

(R1) $\forall X \subseteq E : 0 \leq r(X) \leq |X|$,

(R2) $\forall X \subseteq Y \subseteq E : r(X) \leq r(Y)$,

(R3) $\forall X, Y \subseteq E : r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

Beweis. Wiederum sind (R1) und (R2) trivial. Sei $B_{X\cap Y}$ eine Basis für $X \cap Y$. Da $B_{X\cap Y} \in \mathcal{I}(M_{|X\cup Y})$ können wir diese durch wiederholte Anwendung von (I3) zu einer Basis $B_{X\cup Y}$ von $X \cup Y$ ergänzen und erhalten

$$\begin{aligned}
r(X) + r(Y) &\geq |B_{X\cup Y} \cap X| + |B_{X\cup Y} \cap Y| \\
&= |(B_{X\cup Y} \cap X) \cup (B_{X\cup Y} \cap Y)| + |(B_{X\cup Y} \cap X) \cap (B_{X\cup Y} \cap Y)| \\
&= |B_{X\cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X\cup Y} \cap (X \cap Y)| \\
&= |B_{X\cup Y}| + |B_{X\cap Y}|.
\end{aligned}$$

□

Den von einer Menge von Vektoren in einem Vektorraum V aufgespannten Vektorraum kann man betrachten als Menge von Vektoren, die die Dimension nicht vergrößern. Dabei spielt die Reihenfolge keine Rolle, d.h. die *lineare Hülle* ist ein Hüllenoperator:

Definition 1.2.13 *Sei E eine Menge und $cl : 2^E \to 2^E$. Dann heißt cl ein* Hüllenoperator, *wenn*

(CL1) $\forall X \subseteq E : X \subseteq cl(X)$,

(CL2) $\forall X \subseteq Y \subseteq E : cl(X) \subseteq cl(Y)$,

(CL3) $\forall X \subseteq E : cl(cl(X)) = cl(X)$.

Bevor wir zeigen, daß die Rangaxiome das Matroid axiomatisieren, definieren wir zunächst mit Hilfe der Rangfunktion einen Hüllenoperator.

Lemma 1.2.14 *Sei r eine subkardinale, monotone, submodulare Funktion, also z.B. Rangfunktion eines Matroids. Definieren wir die Abschlußfunktion von M als*

$$\forall X \subseteq E : \mathit{cl}\,(X) := \{e \in E \mid r(X \cup e) = r(X)\},$$

dann ist cl ein Hüllenoperator und

$$r(\mathit{cl}\,(X)) = r(X).$$

Beweis. (CL1) und (CL2) sind klar. Wir zeigen zunächst die letzte Behauptung per Induktion über $k := \mathrm{cl}\,(X) \setminus X$. Da $k = 0$ klar ist, sei $\mathrm{cl}\,(X) \setminus X = \{y_1 \ldots, y_{k+1}\}$. Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung und (R3):

$$\begin{aligned} r(X) + r(X) &= r(X \cup \{y_1 \ldots, y_k\}) + r(X \cup y_{k+1}) \\ &\geq r(X \cup \{y_1 \ldots, y_{k+1}\}) + r(X), \end{aligned}$$

somit $r(\mathrm{cl}\,(X)) \leq r(X)$, und (R2) impliziert die Gleichheit. Zu zeigen bleibt (CL3). Angenommen $y \in \mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\,(X)) \setminus \mathrm{cl}\,(X)$. Dann haben wir $r(X \cup y) > r(X) = r(\mathrm{cl}\,(X)) = r(\mathrm{cl}\,(X) \cup y)$. Widerspruch. □

Satz 1.2.15 *Sei $r : 2^E \to \mathbb{N}$ eine subkardinale, monotone, submodulare Funktion. Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ die Menge der Teilmengen $X \subseteq E$ mit $r(X) = |X|$. Dann ist $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r.*

Beweis. Nach (R1) ist $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$, also gilt (I1). Ist $e \notin I$ gilt wegen (R3) und (R1)

$$r(I \cup e) \leq r(I) + r(e) \leq r(I) + 1. \tag{1.4}$$

Dies impliziert sofort (I2). Seien nun $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Angenommen $\forall e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$, so hätten wir $I_2 \subseteq \mathrm{cl}\,(I_1)$ und somit mit Lemma 1.2.14 $r(I_2) \leq r(I_1) < |I_2|$ im Widerspruch zu $I_2 \in \mathcal{I}$. Also erfüllt $\mathcal{I}$ (I3).

Bezeichnet r_M die Rangfunktion von $M = (E, \mathcal{I})$, so bleibt zu zeigen $r = r_M$. Sei also $X \subseteq E$ und B_X eine Basis von $M_{|X}$. Dann ist $B_X \in \mathcal{I}$, also $r_M(X) = |B_X| = r(B_X) \leq r(X)$. Andererseits ist per definitionem B_X kardinalitätsmaximal in X mit $r(B_X) = |B_X|$. Lemma 1.2.14 impliziert also $r(B_X) = r(X)$. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 1.2.16 *Sei $r : 2^E \to \mathbb{N}$. Dann ist r die Rangfunktion eines Matroids auf E genau dann, wenn r (R1),(R2) und (R3) erfüllt.*

Implizit haben wir auch noch folgendes bewiesen:

Proposition 1.2.17 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Rangfunktion r. Dann gilt*

1. $X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow |X| = r(X)$,
2. $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow |X| = r(X) = r(E)$,
3. $X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall e \in X : r(X \setminus e) = r(X) = |X| - 1$.

Übung 1.2.18 *Gib die Rangfunktion für uniforme und graphische Matroide an.*

Beispiel 1.2.19 *Sei $\mathcal{P} \subseteq \binom{E}{k}$ eine Teilfamilie der k-elementigen Teilmengen von E mit der Eigenschaft, daß $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : |P_1 \cap P_2| = k - 1 \Rightarrow \binom{P_1 \cup P_2}{k} \subseteq \mathcal{P}$. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \{C \in \binom{E}{k+1} \mid \forall C' \in \mathcal{P} : C' \not\subseteq C\}$. Offensichtlich erfüllt diese Menge die Kreisaxiome. Wir nennen ein solches Matroid ein* paving matroid.

Sei $E = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}, k = 5$ und

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & = & \{a_1, a_2, a_3, b_i, c_i \mid i = 1, 2, 3\} \cup \\ & \cup & \{b_1, b_2, b_3, a_i, c_i \mid i = 1, 3\} \cup \{c_1, c_2, c_3, a_i, b_i \mid i = 1, 2, 3\}, \end{array}$$

das sind die Mengen, die in Abbildung 1.2.19 wie ein L oder ein T aussehen. Dann ist $\mathcal{P}$ ein paving matroid.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & - & a_2 & - & a_3 \\ | & & | & & | \\ b_1 & - & b_2 & - & b_3 \\ | & & | & & | \\ c_1 & - & c_2 & - & c_3. \end{array}$$

Abbildung 1.1: Das Tic-Tac-Toe Matroid

Wenden wir uns nun wieder dem Abschlußoperator zu. Er hat eine dem Axiom (B3) ähnliche Austauscheigenschaft, die wir als Steinitz-MacLane-Austauscheigenschaft notieren:

Lemma 1.2.20

(CL4) $\forall X \subseteq E \forall e \in E : f \in cl\,(X \cup e) \setminus cl\,(X) \Rightarrow e \in cl\,(X \cup f) \setminus cl\,(X)$.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{cl}\,(X \cup e) \setminus \mathrm{cl}\,(X)$. Wegen Gleichung 1.4 ist $r(X \cup \{f, e\}) = r(X \cup e) = r(X) + 1$ und außerdem $r(X) + 1 \geq r(X \cup f) > r(X)$. Folglich ist $r(X \cup \{f, e\}) = r(X \cup f)$ und somit $e \in \mathrm{cl}\,(X \cup f)$. □

Satz 1.2.21 *Sei E eine Menge und cl $: 2^E \to 2^E$ ein Hüllenoperator mit Steinitz-MacLane-Austauscheigenschaft, also eine Abbildung, die (CL1), (CL2), (CL3) und (CL4) erfüllt. Sei*

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq E \mid \forall e \in X : e \notin cl\,(X \setminus e)\}.$$

Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Abschlußoperator cl.

Beweis. (I1) ist trivialerweise erfüllt. Sei nun $e \in I' \subset I \in \mathcal{I}$, so führt die Annahme $e \in \mathrm{cl}\,(I' \setminus e)$, wegen $e \in \mathrm{cl}\,(I' \setminus e) \subseteq \mathrm{cl}\,(I \setminus e)$ (CL2) zum Widerspruch.

Zum Nachweis von (I3) nehmen wir an, es gäbe $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$, die (I3) verletzten. Unter allen solchen wählen wir ein Paar mit maximalem Schnitt. Zunächst haben wir nach Definition von $\mathcal{I}$ und Annahme $\forall e \in I_2 \exists f \in I_1 : f \in \mathrm{cl}\,(I_1 \cup e \setminus f)$, also wegen (CL4) und, da $I_1 \in \mathcal{I}$ ist $\forall e \in I_2 : e \in \mathrm{cl}\,(I_1)$, also $I_2 \subseteq \mathrm{cl}\,(I_1)$. Sei nun $e \in I_2 \setminus I_1 \neq \emptyset$. Wegen $I_2 \in \mathcal{I}$ und (CL2) gilt $I_1 \not\subseteq \mathrm{cl}\,(I_2 \setminus e)$, sei also $f \in I_1 \setminus \mathrm{cl}\,(I_2 \setminus e)$. Setze $I_2' := I_2 \setminus e \cup f$, so ist I_1, I_2' ein Paar, das (I3) widerspricht mit größerem Schnitt.

Zu zeigen bleibt, daß $\mathrm{cl}_M = \mathrm{cl}$ ist. Sei also $x \in \mathrm{cl}_M(X) \setminus X$. Per definitionem haben wir dann $r(X \cup x) = r(X)$. Sei B eine Basis von $M_{|X}$. Dann ist $(B \cup x) \notin \mathcal{I}$ also wegen $B \in \mathcal{I} : x \in \mathrm{cl}\,(B) \subseteq \mathrm{cl}\,(X)$. Die umgekehrte Inklusion geht analog.

Korollar 1.2.22 *Sei cl $: 2^E \to 2^E$. Dann ist cl der Abschluß eines Matroids auf E genau dann, wenn cl (CL1),(CL2),(CL3) und (CL4) erfüllt.*

Definition 1.2.23 *Die* abgeschlossenen Mengen *von M bezeichnen wir als* Unterräume von M.

Die Unterräume der Dimension $\left\{\begin{array}{c} r(M)-1 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\}$ *heißen* $\left\{\begin{array}{c} Hyperebenen \\ Punkte \\ Geraden \end{array}\right\}$.

Wir sagen $X \subseteq E$ ist ein Erzeugendensystem *für E, falls cl $(X) = E$.*

Wie nicht anders zu erwarten sind Basen minimale Erzeugendensysteme und Hyperebenen maximale Nicht-Erzeugendensysteme.

Proposition 1.2.24 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $X \subseteq E$. Dann gilt*

1. *X ist ein Erzeugendensystem $\Leftrightarrow r(X) = r(E)$.*
2. *X ist eine Basis $\Leftrightarrow$ X ist ein Erzeugendensystem und $\forall e \in X : X \setminus e$ ist kein Erzeugendensystem.*
3. *X ist eine Hyperebene $\Leftrightarrow$ X ist kein Erzeugendensystem, aber $\forall e \in E \setminus X$: $X \cup e$ ist ein Erzeugendensystem.*

Beweis. Übung.

Mit Hilfe des Abschlusses beweisen wir jetzt eine Verschärfung des "weak elimination axioms".

Proposition 1.2.25 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Familie seiner Kreise. Dann gilt*

1. *$X \subseteq E$ ist ein Kreis von M genau dann, wenn $\forall e \in X : e \in cl\,(X \setminus e)$ und $X \setminus e \in \mathcal{I}$.*
2. *$cl\,(X) = X \cup \{e \in E \mid \exists C \in \mathcal{C} : e \in C \subseteq X \cup e\}$.*

(C3)' $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}\, \forall e \in C_1 \cap C_2\, \forall f \in C_1 \setminus C_2\, \exists C_3 \in \mathcal{C} : f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus e.$

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da die Kreise die minimalen abhängigen Mengen sind. Sei nun $e \in \mathrm{cl}\,(X) \setminus X$. Sei B eine Basis von $M_{|X}$. Dann ist $r(X \cup e) = r(X) = r(B \cup e) = r(B)$. Also schließt e einen Kreis mit B, woraus die zweite Aussage folgt.

Zum Beweis von $(C3)'$ betrachten wir wegen $e \in \mathrm{cl}\,(C_2 \setminus e)$:

$$f \in \mathrm{cl}\,(C_1 \setminus f) \subseteq \mathrm{cl}\,(C_1 \cup C_2 \setminus \{e, f\}),$$

woraus mit der letzten Aussage die Behauptung folgt.

Beispiel 1.2.26 *Wir hatten in Übung 1.2.18 die Rangfunktion der Kantenmenge eines graphischen Matroids als*

$$r(X) = |V[X]| - |\text{Komponenten von } V[X]|$$

kennengelernt. Also sind die Komplemente der Hyperebenen des Polygonmatroids eines zusammenhängenden Graphen gerade die minimalen Kantenschnitte.

In diesem Zusammenhang stellen wir fest, daß wir bei graphischen Matroiden annehmen können, daß der zugehörige Graph zusammenhängend ist, da die Identifikation zweier Knoten aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten keine neuen Kreise liefert.

1.3 Geometrie niederdimensionaler Matroide

Wir haben lineare Matroide als Vektormatroide kennengelernt. Durch Übergang von linearer zu affiner Abhängigkeit kann man in der geometrischen Repräsentierung eine Dimension „sparen“.

Proposition 1.3.1 *Sei $E \subseteq V$ eine endliche Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes und $\mathcal{I}$ die Menge der affin unabhängigen Teilmengen von E. Dann ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid.*

Beweis. Schreibe $E = \{v_1, \ldots, v_k\}$ als Matrix A. Betrachte das Vektormatroid $M[\binom{A}{1^\top}]$ gelabelt mit den zugehörigen Elementen aus E. Offensichtlich ist dann die Menge $\mathcal{I}$ gerade die Familie der unabhängigen Mengen von $M[\binom{A}{1^\top}]$. $\square$

Wir sagen M ist *affin* über $\mathbb{K}$, wenn es isomorph zu einem solchen Matroid ist.

Beispiel 1.3.2 *Betrachte die Punktmenge*

$$\{(0,0),(1,2),(3,6),(2,0),(3,0),(0,1),(0,2),(3,-2),(5,-2),(-3,-2)\} \subseteq \mathbb{Q}$$

wie in Abbildung 1.2. Das zugehörige affine Matroid nennen wir Desargues-Matroid. Man kann es auch durch seine Dreipunktgeraden als paving matroid definieren.

Übung 1.3.3 *Zeige, das Desargues-Matroid ist ein Paving-Matroid.*

Das Diagramm in Abbildung 1.2 repräsentiert das Desargues-Matroid also allein durch Inzidenzen und ohne explizite Angabe der Koordinaten der Punkte. Wir erhalten eine Repräsentierung eines Matroids vom Rang kleiner gleich vier, indem wir eine Konfiguration aus Punkten, Geraden und Ebenen zeichnen, wobei die Punkte die Elemente repräsentieren und

1. die Elemente eines dreielementigen Kreises auf einer Geraden liegen und

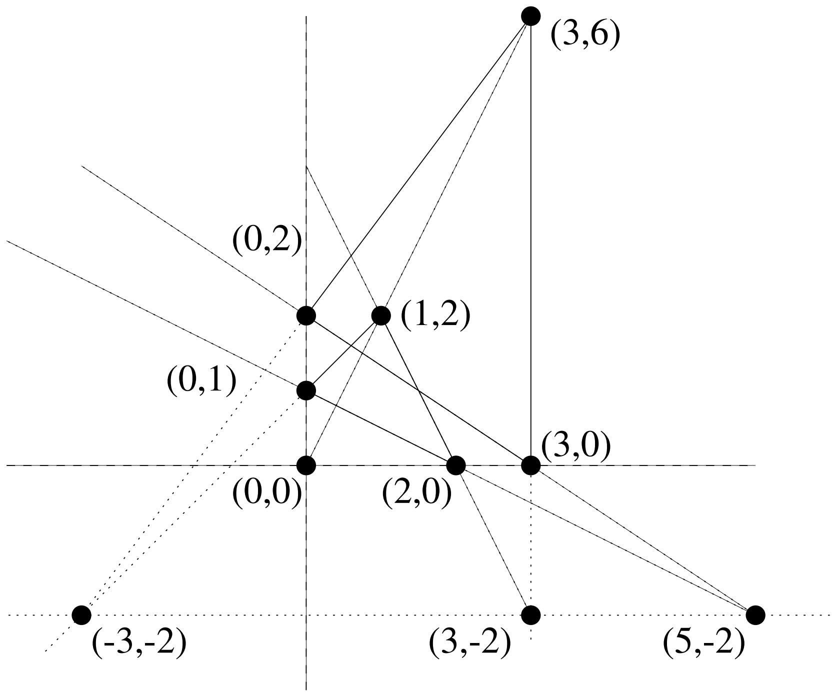

Abbildung 1.2: Das Desargues-Matroid

2. die Elemente eines vierelementigen Kreises in einer Ebene liegen.

Im folgenden werden wir die Frage betrachten, wann eine geometrische Inzidenz-Konfiguration ein Matroid repräsentiert.

Beispiel 1.3.4 *Betrachten wir dazu die Rang 4 Inzidenzstruktur in Abbildung 1.3. Wenn wir die Konfiguration als Matroid interpretieren wollen, so erhalten wir*

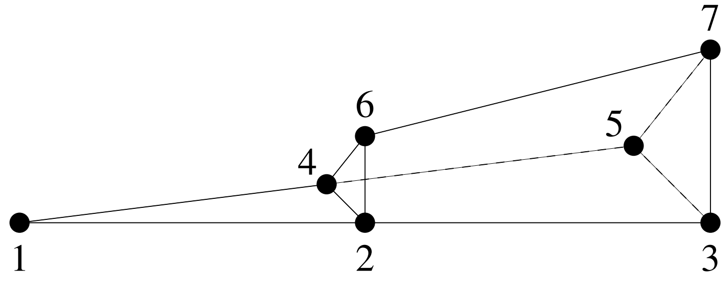

Abbildung 1.3: Das Escher „Matroid"

als abgeschlossene abhängige Mengen seine Dreipunktgeraden $\{1,2,3\}, \{1,4,5\}$

und die Fünfpunktebenen $\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,6,7\}$, $\{1,4,5,6,7\}$. *Laut dieser Liste ist* $r(\{1,6,7\}) = 3$. *Damit erhalten wir*

$$\begin{aligned} 4+3 &= r(\{1,4,5,6,7\} \cup \{1,2,3,6,7\}) + r(\{1,4,5,6,7\} \cap \{1,2,3,6,7\}) \\ &> r(\{1,4,5,6,7\}) + r(\{1,2,3,6,7\}) \\ &= 3+3 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Submodularität. Ist hingegen $\{1,6,7\}$ *eine Gerade, so stellt die Konfiguration ein Matroid dar.*

Formalisieren wir das, so fordern wir zunächst als „Selbstverständlichkeiten“, daß eine Gerade mit mindestens zwei Punkten inzidiert und eine Ebene mit mindestens drei Punkten, die nicht alle auf einer Geraden liegen, inzidiert.

Zusätzliche Forderungen notieren wir in

Definition 1.3.5 *Ein* Inzidenzdiagramm D *aus Punkten, Geraden und Ebenen heißt* Matroidkonfiguration, *wenn*

1. *je zwei verschiedene Geraden von* D *haben höchstens einen Punkt gemeinsam*
2. *je zwei verschiedene Ebenen, die sich in mehr als einem Punkt schneiden, schneiden sich in einer Gerade,*
3. *je zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben, liegen in einer Ebene.*
4. *jede Gerade, die eine Ebene in mehr als einem Punkt schneidet, ist in dieser Ebene enthalten.*

Eine Matroidkonfiguration D repräsentiert *das Matroid* $M = (E, \mathcal{I})$, *wenn es eine Bijektion* $\varphi : E \to \{$*Punkte von* $D\}$ *gibt mit* $C \subseteq E$ *ist ein Kreis von* M *genau dann, wenn*

1. *entweder* $|C| = 3$ *und* $\varphi(C)$ *liegt auf einer Gerade von* D, *i.e.* $\varphi(C)$ *ist* collinear
2. *oder* $|C| = 4$ *und* $\varphi(C)$ *enthält keine drei collinearen Punkte und liegt in einer Ebene, i.e.* $\varphi(C)$ *ist* coplanar
3. *oder* $|C| = 5$ *und* $\varphi(C)$ *enthält weder drei collineare, noch vier coplanare Punkte.*

Übung 1.3.6 *1. Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein einfaches Matroid und $r(M) \leq 4$. Dann gibt es eine Matroidkonfiguration, die M repräsentiert.*

2. Sei D eine Matroidkonfiguration, dann gibt es ein Matroid, das durch D repräsentiert wird.

Beispiel 1.3.7 *Betrachte die Konfiguration in Abbildung 1.4. Nach Übung 1.3.6 definiert diese ein Matroid M, das wir als Non-Desargues-Matroid bezeichnen.*

Vergleichen wir die Konfiguration mit derjenigen, die durch Abbildung 1.2 definiert wird, so fällt auf, daß eine Dreipunktgerade gebrochen wurde. Diese ist in Vektormatroiden „zwingend vorgeschrieben“.

Satz 1.3.8 (Satz von Desargues (klassisch):) *In der reellen Ebene gilt: Liegen zwei Dreiecke perspektiv, so sind die Schnittpunkte paarweise sich entsprechender Dreiecksseiten collinear.*

Die beiden Dreiecke in Abbildung 1.4 sind $\{a, b, c\}$ und $\{a', b', c'\}$. Der Punkt der Perspektive ist p, und x, y, z entstehen als Schnitte der Geraden sich entsprechender Dreiecksseiten. Offensichtlich können wir mit dem bisher erarbeiteten Instrumentarium diesen Satz auch anders formulieren.

Satz 1.3.9 (Desargues (matroidsch):) *Das Non-Desargues Matroid ist nicht linear.*

Beweis. Angenommen es gäbe Vektoren $p, a, b, c, a', b', c', x, y, z \in \mathbb{K}^3$, die das Matroid über einem Körper $\mathbb{K}$ repräsentierten. Da $GF(2)^3$ nur 8 Elemente hat, gibt es in $\mathbb{K}$ mindestens zwei von Null verschiedene Elemente α, β. Wir betten nun die Konfiguration in $\mathbb{K}^4$ ein, indem wir z.B. von a übergehen zu $\binom{0}{a}$. Sei nun $v = \binom{\alpha}{p}$ und $w = \binom{\beta}{p}$. Dann ist $\dim(\{p, v, w, a, a'\}) = 3$, also existiert $0 \neq a'' \in \langle v, a' \rangle \cap \langle w, a \rangle$. Analog konstruieren wir b'' und c'' und erhalten die Figur in Abbildung 1.5. Nach der Annahme müßte sich diese Abbildung zu einer Matroidkonfiguration erweitern lassen. Sei M die Rangfunktion dieses Matroids. Betrachten wir die Ebene $\langle a'', b'', c'' \rangle$. Zunächst haben wir $r(M) + r(\{a'', b'', x\}) \leq r(\{a'', b'', v, a', b', x\}) + r(\{a'', b'', w, a, b, x\}) = 6$ also $r(\{a'', b'', x\}) \leq 2$ und somit $x \in \langle a'', b'', c'' \rangle$. Analog schließen wir insgesamt $r(\{a'', b'', c'', x, y, z\}) = 3$. Nun haben wir aber den Widerspruch

$$\begin{aligned} r(\{x, y, z\}) &\leq r(\{a'', b'', c'', x, y, z\} \cap \{p, a, a', b, b', c, c', x, y, z\}) \\ &\leq r(\{a'', b'', c'', x, y, z\}) + r(\{p, a, a', b, b', c, c', x, y, z\}) - 4 \\ &= 3 + 3 - 4 = 2. \end{aligned}$$

□

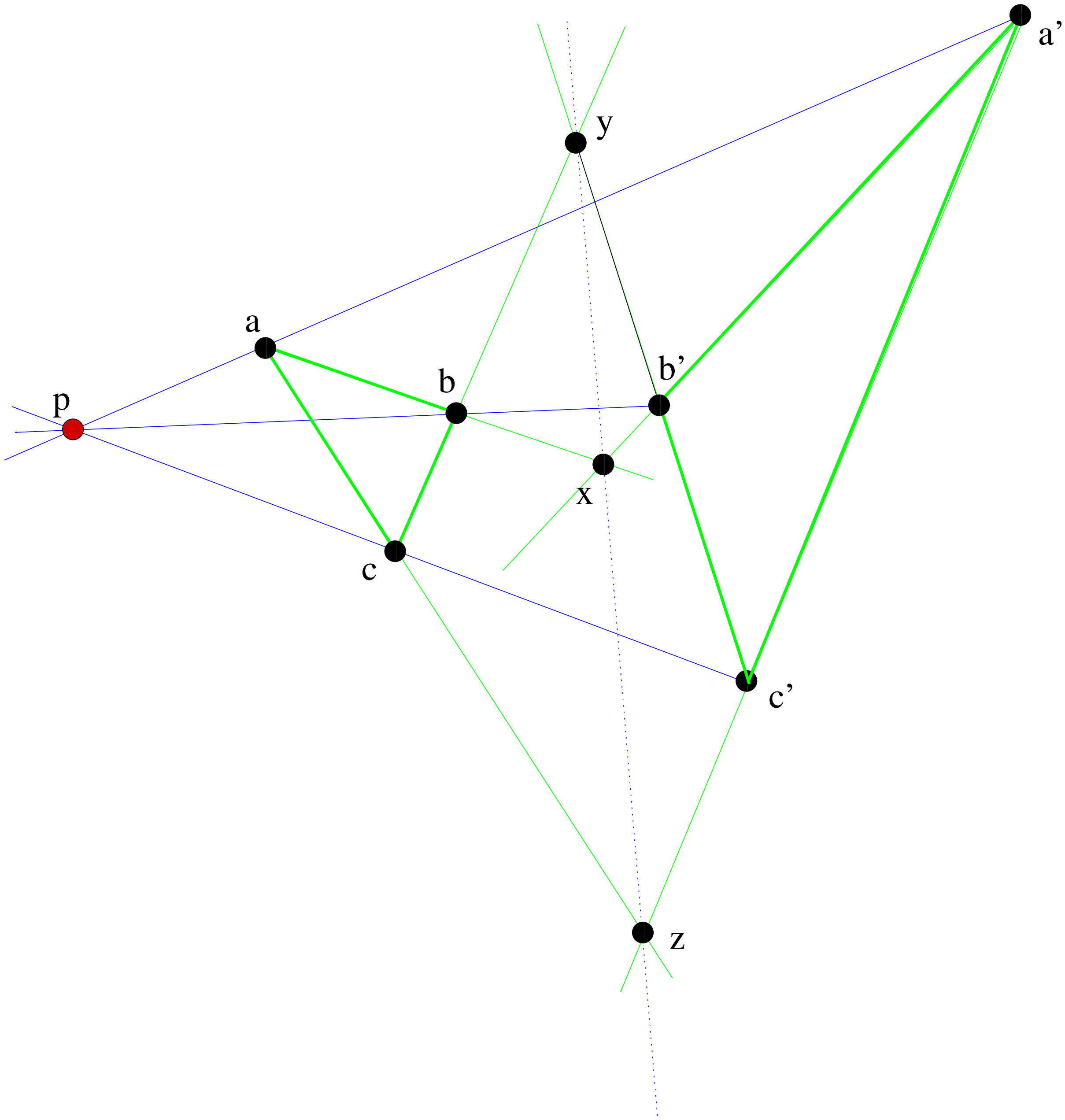

Abbildung 1.4: Das Non-Desargues Matroid

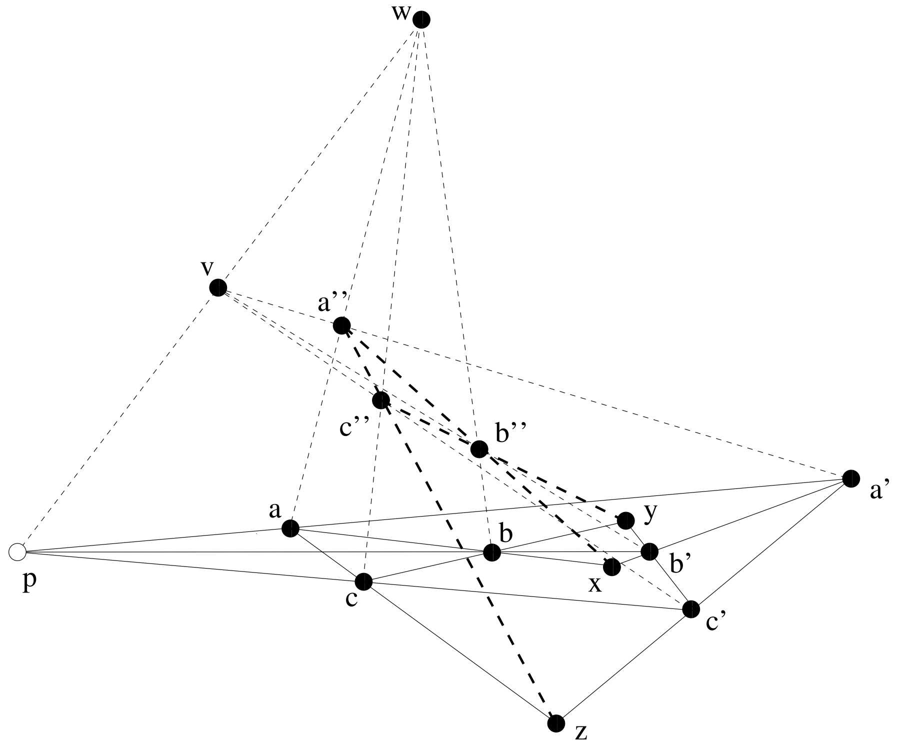

Abbildung 1.5: Das ist kein Matroid

Übung 1.3.10 *Betrachte die Matroidkonfiguration in Abbildung 1.6. Das zugehörige Matroid heißt Vámos-Matroid* V_8. *Schließe mit Hilfe von Beispiel 1.3.4, daß das Vámos-Matroid nicht linear ist.*

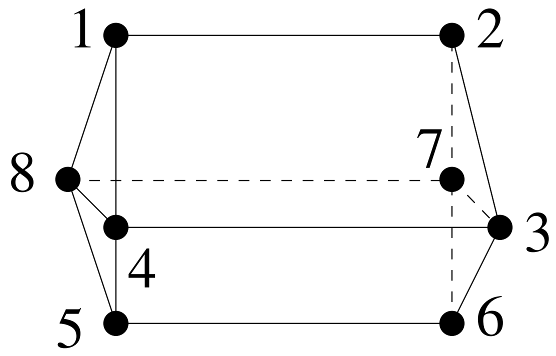

Abbildung 1.6: Das Vámos-Matroid

1.4 Transversalmatroide

Wir kommen zu einer weiteren wichtigen Beispielklasse. Sei S eine endliche Menge und $\{A_1, \dots, A_m\}$ eine Familie von (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Teilmengen von S. Ist $J = \{1, \dots, m\}$ so schreiben wir kurz $(A_j)_{j \in J}$. Eine Menge $T \subseteq S$ heißt eine *partielle Transversale* von $(A_j)_{j \in J}$, falls es $K \subseteq J$ und eine Bijektion $\psi : K \to T$ gibt mit $\forall i \in K : \psi(i) \in A_i$. Haben wir $K = J$, so heißt T eine *Transversale* oder eine *Liste verschiedener Repräsentanten*.

Man kann partielle Transversale einer Familie $\mathcal{A} = (A_j)_{j \in J}$ von Teilmengen einer Menge S als Matchings in bipartiten Graphen $\Delta(\mathcal{A}) = (S \dot\cup J, E)$ auffassen, wobei $e = (s, j) \in E :\Leftrightarrow s \in A_j$.

Satz 1.4.1 *Sei* $\mathcal{A}$ *eine Familie* $\{A_1, \dots, A_m\}$ *von Teilmengen von* S *und sei* $\mathcal{I}$ *die Menge der partiellen Transversalen von* $\mathcal{A}$. *Dann ist* $\mathcal{I}$ *die Menge der unabhängigen Mengen eines Matroids, welches wir das* Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ *nennen.*

Beweis. Wir haben nur (I3) zu zeigen. Seien also $|T_1| < |T_2|$ partielle Transversale und M_1, M_2 die zugehörigen Matchings in $\Delta(\mathcal{A})$. Da $|M_1| < |M_2|$ enthält $M_1 \cup M_2$ einen M_1-M_2-alternierenden Weg P (also einen Weg, der abwechselnd Kanten aus M_1 und M_2 benutzt), der eine Kante mehr in M_2 als in M_1 benutzt.

Da der Weg ungerade Länge hat, besucht er gerade viele Knoten, wir können also oBdA annehmen:

$$P = s_1 1 s_2 2 \ldots s_k k.$$

Wir haben also $\psi_2(i) = s_i = \psi_1(i+1)$ für $i = 1, \ldots, k-1$, $\psi_2(k) = s_k$ und $s_1 \in T_2 \setminus T_1$. Ist nun K die Indexmenge für T_1, dann gilt $k \notin K \supseteq \{1, \ldots, k-1\}$. Wir definieren nun $\psi : K \cup k \to T_1 \cup s_1$ vermöge

$$\psi(j) = \begin{cases} \psi_2(j) & \text{falls } j \in \{1, \ldots, k\} \\ \psi_1(j) & \text{sonst} \end{cases}$$

und ψ beweist, daß $T_1 \cup s_1$ eine partielle Transversale ist. □

Definition 1.4.2 *Wir sagen eine Matroid ist* transversal*, wenn es isomorph zu einem Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ ist.*

Beispiel 1.4.3 *Betrachte die Graphen in Abbildung 1.7. Der bipartite Graph G_1 definiert ein Transversalmatroid $M[\mathcal{A}]$ auf $\{1, 2, 3, 4\}$. Man sieht $M[\mathcal{A}] = M(G_2)$. Hingegen ist $M(G_3)$ nicht transversal. Denn ansonsten gäbe es A_i mit $\{i, i+1\} \subseteq A_i$ für $i = 1, 2, 3$ im Widerspruch zu $r(M(G_3)) = 2$.*

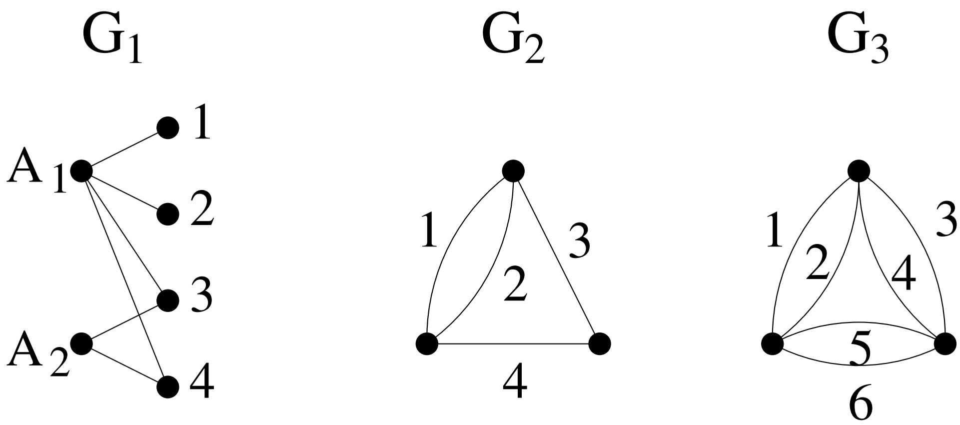

Abbildung 1.7: Transversal, nicht transversal

1.5 Geometrische Verbände und der Greedyalgorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst den Ansatz der Inzidenzstrukturen für Punkte, Geraden und Ebenen auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Dafür bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(M)$ die Menge der abgeschlossenen Unterräume von $M = (E, \mathcal{I})$.

Lemma 1.5.1 $(\mathcal{L}, \subseteq)$ *ist ein Verband mit*

$$\forall X, Y \in \mathcal{L}(M) : X \wedge Y = X \cap Y \textit{ und } X \vee Y = cl\,(X \cup Y).$$

Beweis. Bekanntermaßen induziert die Inklusionsrelation eine Partialordnung. Wir haben also nur zu verifizieren, daß Supremum und Infimum wie behauptet existieren. Proposition 1.2.25 impliziert sofort, daß mit X und Y auch deren Schnitt abgeschlossen ist. Der Rest ist trivial. □

Wir haben die abgeschlossenen Mengen als maximale Mengen bzgl. konstanten Ranges definiert. Außerdem hatten wir gesehen, daß die Rangfunktion „keine Sprünge“ macht. Demnach erfüllt $\mathcal{L}(M)$ die folgende Definition.

Definition 1.5.2 *Sei L ein Verband. Eine* Kette von x nach y *ist eine Sequenz $x = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = y$ in L. Die* Länge *der Kette ist n und die Kette ist* maximal*, wenn alle $<$-Relationen in der Kette Bedeckungsrelationen sind. L erfüllt die* JORDAN-DEDEKIND-Kettenbedingung *(L* ist JD*), wenn für jedes Paar $x < y$ alle maximalen Ketten von x nach y dieselbe Länge haben. Ist L JD, so definieren wir für $x \in L$ $r(x)$ als die Länge einer maximalen Kette von 0 nach x.*

Hat eine Partialordnung ein global kleinstes (größtes) Element, so nennen wir dieses Null. Hat eine Element eine Null, so kann man für jedes Element $x \in P$ die Höhe $h(x)$ definieren als die maximale Länge einer Kette von 0 nach x. Ein Element, das die Null bedeckt (von der Eins bedeckt wird) heißt Atom (Coatom)*. Ein Verband ist* atomar*, wenn jedes Element das Supremum der Atome, die mit ihm in Relation stehen, ist.*

Ein endlicher Verband heißt semimodular*, wenn er die* JORDAN-DEDEKIND-*Kettenbedingung Bedingung erfüllt und seine Rangfunktion submodular ist, also der Bedingung*

$$r(x \vee y) + r(x \wedge y) \leq r(x) + r(y)$$

genügt.

Ein Verband heißt geometrisch*, wenn er endlich, atomar und semimodular ist.*

Im Abschnitt 1.2 haben wir also bereits eingesehen

Proposition 1.5.3 *1. $\mathcal{L}(M)$ ist ein geometrischer Verband.*

2. *Ist $e \in E$ eine Schleife oder e parallel zu einem Element f, so gilt $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(M \setminus e)$.*

3. *Ist M ein Matroid und $\tilde{M}$ seine Vereinfachung, so gilt $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(\tilde{M})$.*

Für die letzte Aussage definieren wir noch

Definition 1.5.4 *Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\tilde{E}$ eine Transversale für die Familie derjenigen Parallenklassen, die keine Schleifen sind. Die* Vereinfachung von *$\tilde{M}$ ist dann das Matroid $\tilde{M} := M_{|\tilde{E}}$.*

Die einfachen Matroide stimmen – was auch sonst – mit den geometrischen Verbänden überein.

Satz 1.5.5 *Ein Verband L ist genau dann geometrisch, wenn er isomorph zum Unterraumverband $\mathcal{L}(M)$ eines einfachen Matroids ist.*

Beweis. Zu beweisen bleibt nur die Rückrichtung. Sei also L ein geometrischer Verband. Stimmen Null und Eins überein, so ist L der Unterraumverband des trivialen Matroids $\mathcal{U}_{0,0}$ ansonsten sei E die Menge seiner Atome. Dann definieren wir

$$\forall X \subseteq E : r(X) := r(\bigvee_{e \in X} e).$$

Offensichtlich ist r dann nicht-negativ, subkardinal und monoton. Die Submodularität folgt nun aus

$$\begin{aligned} r(X \cap Y) &:= r(\bigvee_{e \in X \cap Y} e) \\ &\leq r\left(\left(\bigvee_{e \in X} e\right) \wedge \left(\bigvee_{e \in Y} e\right)\right) \\ &\leq r(X) + r(Y) - r(X \cup Y). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind die Mengen $\{X \subseteq E \mid \exists x \in L : X = \{e \in E \mid e \leq x\}\}$ genau die abgeschlossenen Mengen des durch r definierten Matroids. □

Die letzten Überlegungen zeigten, daß Matroide aus geometrischem Blickwinkel eine interessante und natürliche Struktur sind. Die folgenden Überlegungen zum Greedyalgorithmus geben einen Zugang aus der kombinatorischen Optimierung. Tatsächlich scheint dieser Zugang älter [1] zu sein als Whitney's namengebende Arbeit [9].

Definition 1.5.6 *Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ eine Mengenfamilie, die (I1) und (I2) erfüllt. Dann nennen wir $\mathcal{I}$ ein* Unabhängigkeitssystem. *Sei nun $w : E \to \mathbb{R}$ eine* Gewichtsfunktion. *Für $X \subseteq E$ definieren wir das* Gewicht von X *als* $w(X) := \sum_{e \in X} w(e)$. *Das* Maximierungsproblem *für $(\mathcal{I}, w)$ lautet:*

Finde $B \in \mathcal{I}$ mit B maximal und $w(B)$ maximal!

Die Zusatzbedingung B maximal erleichtert das Leben. Da Teilmengen unabhängiger Mengen unabhängig sind, kann man durch Löschen von Elementen mit negativem Gewicht diese Bedingung umgehen.

Der Greedyalgorithmus *für das Paar $(\mathcal{I}, w)$ ist das folgende Verfahren:*

$\{$**Sort** E, *so daß* $w(e_1) \geq \ldots \geq w(e_m)$
$X = \emptyset$;
for $i = 1$ **to** m
 If $X \cup e_i \in \mathcal{I}$ **then** $X := X \cup e_i; \}$

Lemma 1.5.7 *Ist $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $w : E \to \mathbb{R}$, so liefert der Greedyalgorithmus eine Optimallösung des Maximierungsproblems $(\mathcal{I}, w)$.*

Beweis. Sei $B_G = \{b_1, \ldots, b_r\}$ die vom Greedyalgorithmus gefundene Lösung mit $w(b_1) \geq \ldots \geq w(b_r)$. Angenommen B_G ist keine Optimallösung. Sei dann $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{r'}\} \in \mathcal{I}$ eine solche und so gewählt, daß $|B_G \cap \tilde{B}|$ maximal. Sei $b_k = e_l$ das Element aus $B_G \setminus \tilde{B}$ mit kleinstem Index. Sei $I_l = \{e_i \in B_G \mid i \leq l\} \in \mathcal{I}$. Da $\tilde{B}$ maximal unabhängig ist und e_l nicht in $\tilde{B}$ ist, muß $\tilde{B} \cup e_l$ abhängig sein. Nach Proposition 1.1.8 gibt es genau einen Kreis $C(\tilde{B}, e_l)$. Da $\mathcal{I} \ni I_l \subseteq \tilde{B} \cup e_l$, gibt es in $C(\tilde{B}, e_l)$ ein e_j mit $j > l$ also $w(e_j) \leq w(e_l)$. Nun ist aber $\tilde{B} \cup e_l \setminus e_j \in \mathcal{I}$ und $w(\tilde{B} \cup e_l \setminus e_j) = w(\tilde{B}) + w(e_l) - w(e_j) \geq w(\tilde{B})$ im Widerspruch zur Maximalität von $|B \cap \tilde{B}|$. $\square$

Matroide sind genau die Unabhängigkeitssysteme, bei denen der Greedyalgorithmus für beliebige Gewichtsfunktionen die Optimallösung liefert. Man kann also das Basisergänzungsaxiom durch ein Greedyoptimalitätsaxiom ersetzen.

Satz 1.5.8 *Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ eine Mengenfamilie. Dann ist $\mathcal{I}$ die Familie der unabhängigen Mengen eines Matroids genau dann, wenn*

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(I2) $I \in \mathcal{I}$ *und* $I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$,

(G) *Für alle Gewichtsfunktionen $w : E \to \mathbb{R}$ liefert der Greedyalgorithmus eine maximale Menge in $\mathcal{I}$ von maximalem Gewicht.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß unter (I1) und (I2) die Bedingungen (I3) und (G) äquivalent sind. Die Hinrichtung ist Lemma 1.5.7. Seien also $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$. Betrachte dann die Gewichtsfunktion

$$w(e) = \begin{cases} 1+\varepsilon & \text{falls } e \in I_1 \\ 1 & \text{falls } e \in I_2 \setminus I_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \text{für } \varepsilon = \frac{|I_2| - |I_1|}{2|I_1|}.$$

Der Greedyalgorithmus wählt zunächst die Elemente aus I_1 und „sammelt“ $w(I_1) = |I_1|(1+\varepsilon)$. Da I_2 in einer maximalen Menge in $\mathcal{I}$ enthalten ist, gilt

$$w(B_G) \geq w(I_2) \geq |I_2| > w(I_1) = \frac{1}{2}(|I_1| + |I_2|).$$

Also gibt es $e \in I_2 \setminus I_1$ mit $I_1 \cup e \subseteq B_G \in \mathcal{I}$, woraus mit (I2) die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 1.5.9 *Sei S eine Menge von Jobs, die auf einem Computernetzwerk mir r Maschinen gescheduled werden soll. Aufgrund von speziellen Hard- und Softwarevoraussetzungen können einige Jobs nicht auf beliebigen Maschinen gerechnet werden. Prioritäten der Jobs und Rechenzeiten ergeben eine Nutzenfunktion $w : S \to \mathbb{R}$. Die Aufgabe, r Jobs auszusuchen, die gleichzeitig mit maximalem Nutzen gescheduled werden können, löst der Greedyalgorithmus optimal, da eine Transversale der Jobs gesucht wird. Für die Zuordung bleibt ein gewichtetes Matching zu lösen.*