Matroide
Vorlesung WS 96/97
frei nach James G. Oxley: “Matroid Theory”[7]

Winfried Hochstättler
Zentrum für paralleles Rechnen
Universität zu Köln

26. November 2007

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einführung 3
0.2 Präliminarien 5
0.2.1 Mengen 5
0.2.2 Körper und Matrizen 6
0.2.3 Graphen 6
0.2.4 Partialordnungen 9

1 Definitionen und Beispiele **11**
1.1 Unabhängige Mengen und Kreise 11
1.2 Basen, Rang und Abschluß 16
1.3 Geometrie niederdimensionaler Matroide 24
1.4 Transversalmatroide 30
1.5 Geometrische Verbände und der Greedyalgorithmus 31

2 Dualität **36**
2.1 Abstrakte Dualität 36
2.2 Lineare, graphische und transversale Duale 41
2.2.1 Lineare Duale 41
2.2.2 Graphische Duale 42
2.2.3 Transversale Duale 43

3 Minoren **46**
3.1 Allgemeine Minoren 46

3.2 Spezielle Minoren 49
3.3 Projektionen, Unterräume und der Satz vom Abschaum 53

4 Repräsentierbarkeit **56**
4.1 Techniken zur Konstruktion von Repräsentierungsmatrizen 56
4.2 Repräsentierbarkeit über endlichen Körpern, binäre Matroide 61
4.3 Reguläre Matroide 63
4.4 Algebraische Matroide 65

5 Die verbotenen Minoren regulärer Matroide **68**
5.1 Das Resultat und seine Lemmata 68
5.2 Der Beweis von Satz 5.1.4 71

Index **75**

Einführung und Präliminarien

0.1 Einführung

Was sind Matroide? In der Tabelle in Abbildung 1 haben wir einige Begriffe aus der Linearen Algebra gesammelt, die in der Matroidtheorie ein Äquivalent haben, bzw. kein Äquivalent haben.

+	-
Unabhängigkeit	Linearkombination
Abhängigkeit	Längen
Basen	Skalarprodukt
Abschluß	(Winkel)
Unterraume	
Orthogonalität	
Homomorphismen	

Abbildung 1:

So gesehen kann man folgende „Gleichung“ aufstellen:

$$Matroide \longleftrightarrow \text{Lineare Algebra} \setminus \{\text{Zahlen, algebraische Verknüpfungen}\},$$

die auch in dem Titel der grundlegenden Arbeit zur Matroidtheorie ausgedrückt ist:

> Hassler Whitney: *“On the abstract properties of linear dependence”*,
> Amer. J. Mathematics **57**, 509 – 533, (1935).

Die Grafik in Abbildung 2 soll eine Vorstellung davon geben, wie Matroide und ihre wichtigen Spezialfälle einzuordnen sind.

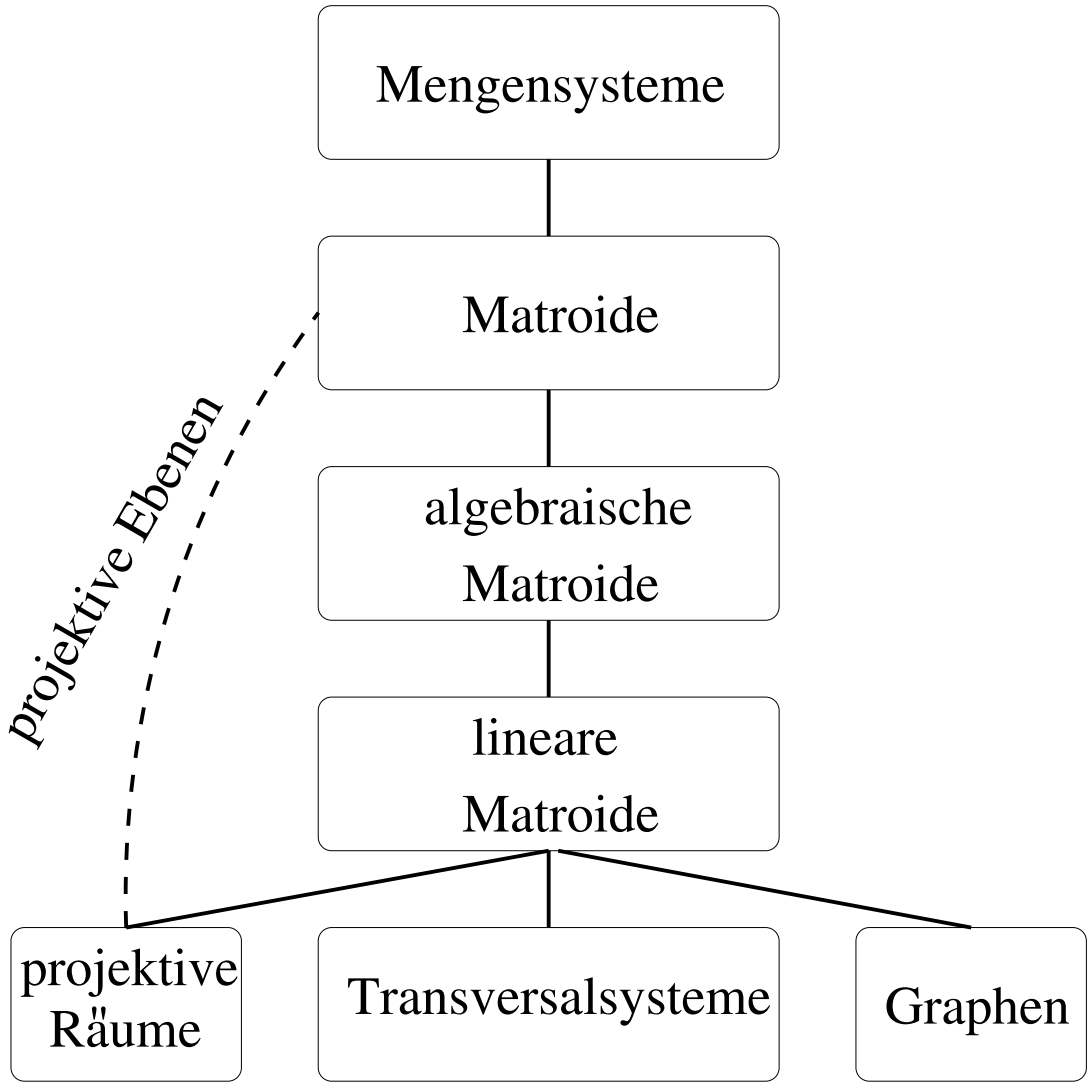
Mengensysteme
Matroide
algebraische Matroide
lineare Matroide
projektive Ebenen
projektive Räume
Transversalsysteme
Graphen

Abbildung 2:

0.2 Präliminarien

0.2.1 Mengen

Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, sind alle Mengen in dieser Vorlesung endlich. Ist E eine Menge, so bezeichnen wir mit

2^E die Potenzmenge von E und mit

$|E|$ die Kardinalität von E.

Die Symbole $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ bezeichnen wie üblich die komplexen, reellen, rationalen, ganzen bzw. natürlichen Zahlen. Dabei nehmen wir an, daß $0 \notin \mathbb{N}$.

Sind $X_1, \ldots, X_n$ Mengen, so bezeichnet

$$X_1 \dot\cup \ldots \dot\cup X_n := \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} X_i$$

die disjunkte Vereinigung der Mengen X_i, i.e. implizit sagen wir damit, daß $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Sind X, Y zwei Mengen, so bedeuten

$X \subset Y$, daß $X \subseteq Y$ und $X \neq Y$,

$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus X \cap Y$ die *symmetrische Differenz*,

$X \cup e$, $X \setminus e$ Abkürzungen für $X \cup \{e\}$, bzw. $X \setminus \{e\}$.

Eine *Multimenge aus einer Menge* S ist eine Menge, bei der Vielfachheiten erlaubt sind. Formal haben wir eine Abbildung $f : S \to \mathbb{N}_0$. Ist z.B. $S = \{a, b, c, d\}$, so entspricht der Multimenge $\{a, a, b, b, b, d\}$ die Abbildung definiert durch $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 0, f(d) = 1$.

Sind $f : \mathbb{Z}^{\geq n_1} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{Z}^{\geq n_2} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so definieren wir

$$g(n) = O(f(n)) :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |g(n)| \leq c|f(n)|.$$

0.2.2 Körper und Matrizen

Bekanntlich gibt es für jeden endlichen Körper $\mathbb{K}$ eine Primzahl p und $k \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbb{K}$ genau p^k Elemente hat, also von der *Ordnung* p^k ist. Diesen – bis auf Isomorphie –eindeutigen Körper bezeichnen wir mit $GF(p^k)$ (das *Galoisfeld* der Ordnung p^k). Für $k = 1$ ist $GF(p) \cong \mathbb{Z}_p$. Wir werden uns vor allem für $GF(2)$ und $GF(3)$ interessieren.

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper und $d \in \mathbb{N}$, so bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^d$ den d-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Eine Matrix A ist, falls nicht anders erwähnt, stets eine $(m \times n)$- Matrix. Mit I_r oder I bezeichnen wir die $(r \times r)$-Einheitsmatrix und mit J_r oder J bzw. 0_r oder 0 die $(r \times r)$-Matrix aus lauter Einsen bzw. aus lauter Nullen.

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $X \subseteq V$, so bezeichnen wir mit $\langle X \rangle$ den *Abschluß von* X, i.e. die Menge aller $\mathbb{K}$-Linearkombinationen. Mit $\dim(V)$ bezeichnen wir die Dimension von V. Sind $U, W \subseteq V$ Unterräume, so ist

$$U + W := \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}.$$

Eine Multimenge $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ heißt *affin unabhängig*, falls $k \geq 1$ und es keine $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

0.2.3 Graphen

Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* V, einer Menge von *Kanten* E und einer *Inzidenzfunktion* $\varphi : E \to V \cup \binom{V}{2}$, wobei $\binom{V}{2}$ die Menge aller zweielementigen Teilmengen von V ist. Ist $\varphi(e) = \{u, v\}$, so sagen wir u ist *adjazent* zu v und e *inzidiert* mit u und v. Das Konzept der Multimenge erlaubt es, Kanten häufig mit ihrem Bild unter der Inzidenzfunktion zu identifizieren, was auch die etwas laxe Schreibweise $G = (V, E)$ rechtfertigt.

Abbildung 3 zeigt die bildliche Darstellung eines Graphen. Die Kante e_4 ist eine *Schleife*, da ihr Bild unter der Inzidenzfunktion einelementig ist. Die Kanten e_1 und e_2 sind *parallel*, da ihre Bildmengen unter φ übereinstimmen. Ein Graph heißt *einfach*, wenn er weder Schleifen, noch parallele Elemente hat. Der Knoten v_4 ist ein *isolierter Knoten*, da er mit keiner Kante inzidiert. Die Inzidenzfunktion eines Graphen kann man durch seine Inzidenzmatrix A beschreiben. Die Zeilen werden dabei durch die Knoten indiziert und die Spalten durch die Kanten. Der

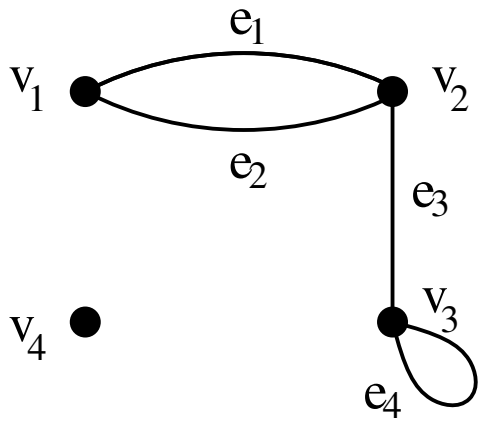

Abbildung 3: Ein Graph

Beispielgraph aus Abbildung 3 hat also die Inzidenzmatrix

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Der *Grad* $d_G(v)$ eines Knotens v ist die Summe der Einträge in der entsprechenden Zeile von A.

Ein Graph $H = (W, F)$ ist ein Teilgraph von $G = (V, E)$, wenn $W \subseteq V, F \subseteq E$ und $\varphi_H = \varphi_{G|F}$. Ist $\emptyset \neq V' \subseteq V$, so bezeichnen wir mit $G[V']$ den von V' in G *induzierten* Teilgraphen von G mit Knotenmenge V' und Kantenmenge $E' := \{e \in E \mid \varphi(e) \subseteq V'\}$. Analog definieren wir für eine Kantenmenge $\emptyset \neq E' \subseteq E$ den von E' in G *induzierten* Teilgraphen $G[E']$ von G mit Knotenmenge $V' = \{v \in V \mid \exists e \in E' : v \in \varphi(e)\}$ und Kantenmenge E'.

Sind $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_1, E_1)$ Graphen, so ist ihre (nicht notwendig disjunkte) *Vereinigung* $G_1 \cup G_2$ der Graph mit Knotenmenge $V_1 \cup V_2$, Kantenmenge $E_1 \cup E_2$ und Inzidenzfunktion $\varphi_{G_1 \cup G_2}$ definiert durch

$$\varphi_{G_1 \cup G_2}(e) := \begin{cases} \varphi_{G_1}(e) & \text{falls } e \in E_1 \\ \varphi_{G_2}(e) & \text{falls } e \in E_2 \end{cases},$$

wobei wir annehmen, daß für $e \in E_1 \cap E_2 : \varphi_{G_1}(e) = \varphi_{G_2}(e)$.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ sind *isomorph*, in Zeichen $G \cong H$, wenn es eine Bijektion der Knoten $\psi : V \to W$ und der Kanten $\vartheta : E \to F$ gibt mit $\varphi_H \circ \vartheta = \psi \circ \varphi_G$.

Ist $n \in \mathbb{N}$, so gibt es bis auf Isomorphie genau einen Graphen mit n Knoten, bei dem je zwei Knoten adjazent sind, den *vollständigen Graphen* K_n.

Ein Graph $G = (V, E)$ ist *bipartit*, wenn $V = X \dot\cup Y$ und außerdem $\forall e \in E : \varphi(e) \cap X \neq \emptyset \neq \varphi(e) \cap Y$. Der *vollständig bipartite Graph* $K_{n,n}$ ist der – bis auf Isomorphie eindeutige – bipartite Graph $G = (X \dot\cup Y, E)$ mit $|X| = n = |Y|$ und $e \in E \Leftrightarrow (\varphi(e) \cap X) \neq \emptyset \neq (\varphi(e) \cap Y)$.

Ein *Spaziergang* in einem Graphen ist eine alternierende Folge $v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k$ von Knoten und Kanten, so daß $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \varphi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$. Sind $v_1, \dots, v_k$ paarweise disjunkt, so ist der Spaziergang ein *Pfad*. Wir sagen, daß so ein Pfad ein (v_0, v_k)*-Pfad* ist und v_0 mit v_k *verbindet*. Die Knoten $v_1, \dots, v_{k-1}$ heißen *innere Knoten* des Pfades. Die *Länge* eines Pfades ist die Anzahl der Knoten, die er enthält. Da ein Pfad in einem einfachen Graphen durch seine Knotenteilfolge determiniert ist, werden wir üblicherweise Pfade als Knotensequenzen angeben. Ein Graph G ist *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen Pfad verbunden sind, ansonsten ist er *unzusammenhängend*. Ist letzteres der Fall, so heißen die (mengentheoretisch) maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G seine *(Zusammenhangs)Komponenten.*

Ist P ein (u, v)-Pfad in $G = (V, E)$ und $e \in E \setminus P$ mit $\varphi(e) = \{u, v\}$, so heißt $P \cup e$ ein *Kreis*. Ein Graph ohne Kreise heißt *Wald*. Ein zusammenhängender Wald ist ein *Baum*. Ein *aufspannender Baum* eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist ein Teilgraph $T = (V, E')$ von G, der ein Baum ist.

Ein *Matching* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge M mit $\forall v \in G[M] : d_{G[M]}(v) = 1$.

Ein *gerichteter Graph* $D = (V, A)$ unterscheidet sich von einem Graphen dadurch, daß die Bilder der Knoten (oder auch *Bögen*) unter der Inzidenzfunktion *geordnete* Tupel sind. Ist $a = (u, v)$ eine Kante in einem Digraph, so sagen wir, a verbindet u mit v. Der Kanten u ist der *Anfang* und v die *Spitze* von a. Obige Definitionen werden sinnvoll übertragen, z.B. ist ein *gerichteter Pfad* eine alternierende Folge $v_0 a_1 v_1 \dots v_{k-1} a_k v_k$ von Knoten und Kanten, so daß $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \varphi(a_i) = (v_{i-1}, v_i)$.

Aus einem Graphen erhält man einen gerichteten Graphen, indem man ihn mit einer *Orientierung* versieht, d.h. für jede Kante Anfang und Spitze bestimmt. Ist andererseits $D = (V, E)$ ein Digraph, so erhält man, indem man das Bildtupel jedes Bogens durch die entsprechende Menge ersetzt, den *zugrundeliegenden Graphen* von D.

Übung 0.2.1 *Sei $T = (V, E)$ ein kreisfreier Graph. Zeigen sie: Es gibt einen Knoten $v \in V$ mit $d(v) = 1$.*

Übung 0.2.2 *Sei $T = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie die paarweise Äquivalenz folgender Aussagen:*

1. *T ist ein Baum.*
2. *T ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.*
3. *T ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.*

Eine besondere Klasse bilden die Graphen, deren Kanten sich kreuzungsfrei in die Ebene zeichnen lassen.

Definition 0.2.3 *Ein* ebener Graph *ist ein Graph $G = (V, E)$ zusammen mit einer Einbettung f in die Ebene $\mathbb{R}^2$, wobei die Knoten des Graphen auf Punkte in $\mathbb{R}^2$ und die Kanten auf offene Jordanbögen abgebildet werden, so daß,*

- *die Bilder von je zwei Objekten aus Knoten und Kanten disjunkt sind und*
- *das Bild eines Knoten v genau dann im topologischen Abschluß des Bildes eines Bogens e liegt, wenn v mit e inzidiert.*

Ein Graph heißt planar*, wenn er eine ebene Einbettung besitzt. Ist f eine ebene Einbettung eines planaren Graphen G, so besteht $\mathbb{R}^2 \setminus f(G)$ aus offfenen einfach zusammenhängenden Mengen, die wir* Gebiete *von G nennen.*

0.2.4 Partialordnungen

Definition 0.2.4 *Eine* partiell geordnete Menge *oder* Partialordnung *$(P, \leq)$ ist eine Menge P zusammen mit einer* reflexiven, antisymmetrischen *und* transitiven *Relation $\leq$, d.h. es gilt*

(P1) $\forall p \in P : p \leq p$,

(P2) $\forall p, q \in P : ((p \leq q \text{ und } q \leq p) \Rightarrow p = q)$,

(P3) $\forall p, q, r \in P : ((p \leq q \text{ und } q \leq r) \Rightarrow p \leq r)$

Gilt $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreiben wir $x < y$. Wir sagen y bedeckt *x, wenn $x < y$ und $x \leq z \leq y \Rightarrow z \in \{x, y\}$.*

Zwei Partialordungen $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2)$ sind isomorph*, wenn es eine relationstreue Bijektion zwischen P_1 und P_2 gibt.*

Sind $x, y \in P$, so heißt $z \in P$ obere (untere) Schranke von x und y*, wenn $z \geq y$ und $z \geq x$. Ein Element z heißt* kleinste obere (größte untere) Schranke *oder* Supremum $x \vee y$ (Infimum $x \wedge y$ von x und y*, wenn z eine obere (untere) Schranke von x und y ist und für alle oberen (unteren) Schranken z' von x und y gilt $z \leq z'$ ($z \geq z'$).*

Eine Partialordnung ist ein Verband*, wenn für Paar x, y Supremum und Infimum existieren.*

Man kann eine endliche Partialordnung durch ihr HASSE-Diagramm repräsentieren. Dies ist eine graphische Repräsentierung eines einfachen Graphen, bei dem, falls $x < y$ ist, y oberhalb von x gezeichnet wird und $x < y$ mit einer Kante verbunden sind genau dann, wenn y x bedeckt.

Beispiel 0.2.5 *Sei $P = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ und $x \leq y \Leftrightarrow x$ ist ein Teiler von y. Dann ist $(P, \leq)$ eine Partialordnung. Abbildung 4 zeigt ihr* HASSE*-Diagramm. Die Partialordnung ist ein Verband und $x \vee y = kgV(x, y)$, $x \wedge y = ggT(x, y)$.*

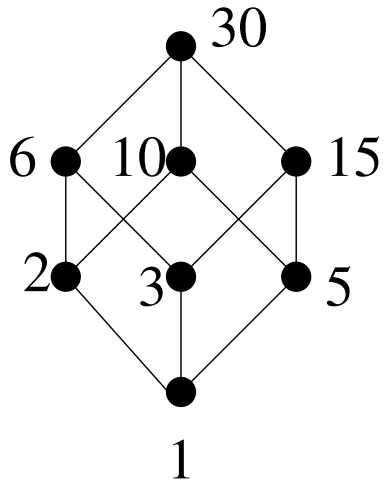

Abbildung 4: Das HASSE-Diagramm der Teiler von 30